

=====

Λυμένη Άσκηση Διακριτού Δυναμικού Συστήματος

www.maths.gr, ©2010, Τηλ.: 210 99 630 55 , 69 79 210 251

=====

Έστω το διακριτό δυναμικό σύστημα:

$$y_{k+1} = A y_k$$

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

Ένα απλό ιδιοδιάνυσμα είναι:

$$u_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Βρίσκουμε την λύση του συστήματος:

$$(A - \lambda I) u_2 = \lambda u_1$$

$\Leftrightarrow$

$$(A - 4 I) u_2 = 4 u_1$$

Ο επαυξημένος πίνακας είναι:

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Με απαλοιφή Gauss-Jordan βρίσκουμε:

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ 4 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

άρα μία γραμμικά ανεξάρτητη λύση από το u_1 είναι:

$$u_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 4 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Βρίσκουμε την λύση του συστήματος:

$$(A - \lambda I) u_3 = \lambda u_2$$

$\Leftrightarrow$

$$(A - 4 I) u_3 = 4 u_2$$

Ο επαυξημένος πίνακας είναι:

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 16 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Με απαλοιφή Gauss-Jordan βρίσκουμε:

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ 0 \\ 16 \\ 0 \end{bmatrix}$$

άρα μία γραμμικά ανεξάρτητη λύση από το u_1 και το u_2 είναι:

$$u_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 16 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Τέλος βρίσκουμε την λύση του συστήματος:

$$(A - \lambda I) u_4 = \lambda u_3$$

$\Leftrightarrow$

$$(A - 4 I) u_4 = 4 u_3$$

Ο επαυξημένος πίνακας είναι:

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 64 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Με απαλοιφή Gauss-Jordan βρίσκουμε:

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ 0 \\ 0 \\ 64 \end{bmatrix}$$

άρα μία γραμμικά ανεξάρτητη λύση από το u_1 , το u_2 και το u_3 είναι:

$$u_4 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 64 \end{bmatrix}$$

Με εφαρμογή του τύπου:

$$y_k = c_1 \lambda^k u_1 + c_2 \lambda^k (k u_1 + u_2) + c_3 \lambda^k \left(\frac{1}{2} k (k-1) u_1 + k u_2 + u_3 \right)$$

$$+ c_4 \lambda^k \left(\frac{1}{6} k(k-1)(k-2) u_1 + \frac{1}{2} k(k-1) u_2 + k u_3 + u_4 \right)$$

=>

$$y_k = c_1 4^k u_1 + c_2 4^k (k u_1 + u_2) + c_3 4^k \left(\frac{1}{2} k(k-1) u_1 + k u_2 + u_3 \right) \\ + c_4 4^k \left(\frac{1}{6} k(k-1)(k-2) u_1 + \frac{1}{2} k(k-1) u_2 + k u_3 + u_4 \right)$$

=>

$$y_k = c_1 4^k \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + c_2 4^k \left(k \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 4 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right) + c_3 4^k \left(\frac{1}{2} k(k-1) \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + k \begin{bmatrix} 0 \\ 4 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 16 \\ 0 \end{bmatrix} \right) \\ + c_4 4^k \left(\frac{1}{6} k(k-1)(k-2) \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \frac{1}{2} k(k-1) \begin{bmatrix} 0 \\ 4 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + k \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 16 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 64 \end{bmatrix} \right)$$

=>

$$y_k = \begin{bmatrix} \frac{1}{6} 4^k (6 c_1 + 6 c_2 k + 3 c_3 k^2 - 3 c_3 k + c_4 k^3 - 3 c_4 k^2 + 2 c_4 k) \\ 2^{(2k+2)} c_2 + 2^{(2k+2)} c_3 k + 2 c_4 4^k k^2 - 2 c_4 4^k k \\ 16 4^k (c_3 + c_4 k) \\ 64 c_4 4^k \end{bmatrix}$$

Επαλήθευση:

$$A y_k = \begin{bmatrix} 2^{(2k+2)} c_1 + 2^{(2k+2)} c_2 k + 2 c_3 4^k k^2 + 2 c_3 4^k k + \frac{2}{3} c_4 4^k k^3 - \frac{2}{3} c_4 4^k k + 2^{(2k+2)} c_2 \\ 8 4^k (2 c_2 + 2 c_3 k + c_4 k^2 + c_4 k + 2 c_3) \\ 64 4^k (c_3 + c_4 k + c_4) \\ 256 c_4 4^k \end{bmatrix}$$

$$y_{k+1} = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} 4^k (6 c_1 + 6 c_2 k + 6 c_2 + 3 c_3 k^2 + 3 c_3 k + c_4 k^3 - c_4 k) \\ 8 4^k (2 c_2 + 2 c_3 k + c_4 k^2 + c_4 k + 2 c_3) \\ 64 4^k (c_3 + c_4 k + c_4) \\ 256 c_4 4^k \end{bmatrix}$$

=>

$$y_{k+1} - A y_k = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

=>

$$y_{k+1} = A y_k$$

www.maths.gr, ©2010, Τηλ.: 210 99 630 55 , 69 79 210 251