

Λυμένη Άσκηση στην Μιγαδική Ανάλυση

Δημήτριος Χριστόπουλος *

2 Ιουνίου 2013

Θέμα 1ο

Έστω η δυναμοσειρά:

$$\frac{3}{2+z-z^2} = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$$

- (α) Υπολογίστε την ακτίνα σύγκλισης της δυναμοσειράς.
(β) Βρείτε αναδρομικό τύπο για τους συντελεστές c_n .
(γ) Να υπολογίσετε τους τρεις πρώτους όρους της δυναμοσειράς.

Λύση

(α)

Η δυναμοσειρά είναι γύρω από το μηδέν, άρα θα χρειαστούμε την απόσταση του πλησιέστερου στο μηδέν ανώμαλου σημείου της f .

Βρίσκουμε τα ανώμαλα σημεία της, τα οποία είναι οι ρίζες του παρονομαστή. Εύκολα βλέπουμε ότι αυτά είναι $z = -1, z = 2$, άρα το πλησιέστερο στο μηδέν σημείο είναι το -1 και απέχει απόσταση $|-1-0| = 1$, οπότε η ακτίνα σύγκλισης της δυναμοσειράς είναι $R = 1$.

(β)

Υπολογίζουμε τους τρεις διαδοχικούς συντελεστές της σειράς Laurent χρησιμοποιώντας ολοκληρώματα για $0 < r < 1$:

$$c_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{C(0,r)} \frac{\frac{3}{2+z-z^2}}{z^{n+1}} dz \quad (1)$$

$$c_{n-1} = \frac{1}{2\pi i} \int_{C(0,r)} \frac{\frac{3}{2+z-z^2}}{z^n} dz \quad (2)$$

$$c_{n-2} = \frac{1}{2\pi i} \int_{C(0,r)} \frac{\frac{3}{2+z-z^2}}{z^{n-1}} dz \quad (3)$$

*maths@maths.gr , www.maths.gr , www.facebook.com/mathsg , Τηλ.: 6979210251

Αφαιρούμε κατά μέλη τις (2), (3) και έχουμε:

$$\begin{aligned}
c_{n-1} - c_{n-2} &= \frac{1}{2\pi i} \int_{C(0,r)} \frac{3}{2+z-z^2} \left(\frac{1}{z^n} - \frac{1}{z^{n-1}} \right) dz \\
&= \frac{1}{2\pi i} \int_{C(0,r)} \frac{3}{2+z-z^2} \frac{1-z}{z^n} dz \\
&= \frac{1}{2\pi i} \int_{C(0,r)} \frac{3}{2+z-z^2} \frac{z-z^2}{z^{n+1}} dz \\
&= \frac{1}{2\pi i} \int_{C(0,r)} \frac{3}{2+z-z^2} \left(\frac{2+z-z^2}{z^{n+1}} - \frac{2}{z^{n+1}} \right) dz \\
&= \frac{1}{2\pi i} \int_{C(0,r)} \frac{3}{z^{n+1}} dz - 2 \left(\frac{1}{2\pi i} \int_{C(0,r)} \frac{3}{z^{n+1}} dz \right) \\
&= 0 - 2c_n \\
&= -2c_n
\end{aligned}$$

όπου στην τρίτη από το τέλος ισότητα χρησιμοποιήσαμε το γεγονός ότι το ολοκλήρωμα ολόμορφης συνάρτησης σε κλειστή καμπύλη στον τόπο ολομορφίας της είναι μηδέν (Θεώρημα Cauchy) κι επίσης την σχέση (1).

Τελικά έχουμε ότι:

$$c_{n-1} - c_{n-2} = -2c_n \Leftrightarrow c_n = \frac{1}{2} (c_{n-2} - c_{n-1}), \quad n = 3, 4, \dots \quad (4)$$

(Υ)

Από την (1) για $n = 0$ και $n = 1$ έχουμε:

$$\begin{aligned}
c_0 &= \frac{1}{2\pi i} \int_{C(0,r)} \frac{3}{z(2+z-z^2)} dz \\
&= \frac{1}{2\pi i} 2\pi i \operatorname{Res} \left(\frac{3}{z(2+z-z^2)}, z=0 \right) \\
&= \frac{3}{2+0-0^2} \\
&= \frac{3}{2} \\
c_1 &= \frac{1}{2\pi i} \int_{C(0,r)} \frac{3}{z^2(2+z-z^2)} dz \\
&= \frac{1}{2\pi i} 2\pi i \lim_{z \rightarrow 0} \frac{d}{dz} \left(\frac{3}{2+z-z^2} \right) \\
&= \lim_{z \rightarrow 0} \frac{-3(1-2z)}{(2+z-z^2)^2} \\
&= -\frac{3}{4}
\end{aligned}$$

Τώρα από την αναδρομική σχέση (4) έχουμε:

$$c_2 = \frac{1}{2} (c_0 - c_1) = \frac{1}{2} \left(\frac{3}{2} - \left(-\frac{3}{4} \right) \right) = \frac{9}{8}$$

Επομένως η δυναμοσειρά μας μέχρι τους τρεις πρώτους όρους είναι:

$$f(z) = \frac{3}{2} - \frac{3}{4}z + \frac{9}{8}z^2 + \dots$$