ΕΚΠΑ - ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

ΑΠΕΙΡΟΣΤΙΚΟΣ ΛΟΓΙΣΜΟΣ Ι (27.10.2011)

Θ 1 **(i)** Αποδείξτε ότι $\sup\{p \in \mathbb{Q} : p < a\} = a, \ \forall \ a \in \mathbb{R}$.

(ii) Αποδείξτε ότι αν $x \in \mathbb{R}$ και $0 \le x < \frac{1}{n}$ για κάθε $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, τότε $x = 0$.

(iii) Έστω $a_1 = \frac{1}{3}$ και $a_{n+1} = 1 - \sqrt{1 - a_n}$ για κάθε $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. Αποδείξτε ότι ισχύει $0 \le a_n \le 1$ για κάθε $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ και εξετάστε την ακολουθία $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ως προς τη σύγκλιση.

Θ2 **(i)** Αποδείξτε πλήρως ότι για κάθε $a \in \mathbb{R}$ υπάρχει $k \in \mathbb{Z}$ ώστε $k \le x < k - 1$.

(ii) Εξετάστε ως προς τη σύγκλιση τις παρακάτω ακολουθίες, υπολογίζοντας τα όρια όταν υπάρχουν:

$$a_n = \frac{1}{n^2}\, \eta\mu^2 \frac{1}{n}, \quad \beta_n = \frac{n}{\sqrt[3]{n^4 + 5n + 8}}, \quad \gamma_n = (-1)^n n^2, \quad \delta_n = \left[\frac{3n}{2}\right]$$

Θ 3 **(i)** Έστω $f, g : [0,1] \to \mathbb{R}$ δύο συνεχείς συναρτήσεις ώστε για κάθε $x \in [0,1]$ είτε $f(x) \ne 0$ είτε $g(x) \ne 0$. Αποδείξτε ότι υπάρχει $a \in \mathbb{R}$ ώστε $f^2(x) + g^2(x) > a$ για κάθε $x \in [0,1]$.

(ii) Έστω $A \subseteq \mathbb{R}$, $f : A \to \mathbb{R}$ μια συνάρτηση και $x_0 \in A$. Αποδείξτε πλήρως ότι η f είναι συνεχής στο x_0 αν και μόνο αν για κάθε ακολουθία $(x_n) \subseteq A$ που $x_n \to x_0$ ισχύει ότι $f(x_n) \to f(x_0)$.

Θ 4 **(i)** Έστω η συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με $f(x) = \begin{cases} x & \text{αν } x \in \mathbb{Q} \\ 0 & \text{αν } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$. Εξετάστε τη συνέχεια και την παραγωγισιμότητα της f σε κάθε σημείο του πεδίου ορισμού της.

(ii) Να βρεθούν τα παρακάτω όρια, αν υπάρχουν

$$\lim_{x \to 3} \frac{[x]^2}{x} \qquad \lim_{x \to \frac{1}{3}} x^{[x]}.$$

Θ 5 **(i)** Υπολογίστε τη μέγιστη τιμή της συνάρτησης $f : [0,4] \to \mathbb{R}$ με $f(x) = \frac{1}{1+x} + \frac{1}{1+|x-2|}$.

(ii) Έστω $f : (a, \beta) \to \mathbb{R}$ μια παραγωγίσιμη συνάρτηση και $x_0 \in (a, \beta)$. Αν υπάρχει η $f''(x_0)$ και το x_0 είναι τοπικό ελάχιστο, αποδείξτε ότι $f''(x_0) \ge 0$.

Θ 6 **(i)** Εξετάστε αν υπάρχουν τα όρια $\lim_{x \to 0^+} \frac{x^a \eta\mu \frac{1}{x}}{x}$ για $a = 0, 1, 2$.

(ii) Έστω πολυώνυμο $p(x) = a_n x^n + \dots + a_1 x + a_0$ όπου $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ είναι άρτιος και $a_n > 0$. Αποδείξτε ότι αν υπάρχει $x_0 \in \mathbb{R}$ ώστε $p(x_0) < 0$, τότε το πολυώνυμο έχει τουλάχιστον δύο πραγματικές ρίζες.

Γράψτε 5 από τα 6 θέματα

Καλή επιτυχία!