ΑΝΑΛΥΤΙΚΗ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ

Θέμα 1: Στο συνήθη χώρο $\mathbb{R}^3$ θεωρούμε διανύσματα $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$, την ορίζουσα $G = \begin{vmatrix} \langle\vec{\alpha},\vec{\alpha}\rangle & \langle\vec{\alpha},\vec{\beta}\rangle \\ \langle\vec{\beta},\vec{\alpha}\rangle & \langle\vec{\beta},\vec{\beta}\rangle \end{vmatrix}$ καθώς και πραγματικούς αριθμούς κ, λ, r, s τέτοιους ώστε $\kappa^2+\lambda^2=1$, $r+s=1$. Τότε:

(i) Να αποδειχθεί ότι $G \geq 0$ (Μονάδες 0,5) και,

(ii) $G>0$ τότε και μόνον τότε αν τα $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$ δεν είναι συγγραμμικά. (Μονάδες 0,5)

(iii) Για τα διανύσματα $\vec{\alpha}' = \kappa\vec{\alpha}+\lambda\vec{\beta}$, $\vec{\beta}' = \lambda\vec{\alpha}-\kappa\vec{\beta}$ ισχύει $\|\vec{\alpha}'\times\vec{\beta}'\| = \|\vec{\alpha}\times\vec{\beta}\|$. Είναι πάντα αληθές ότι $\langle\vec{\alpha},\vec{\beta}\rangle = \langle\vec{\alpha}',\vec{\beta}'\rangle$; (Μονάδες 1,3)

(iv) Αν επιπλέον τα $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$ δεν είναι συγγραμμικά, $\|\vec{\alpha}\| = \|\vec{\beta}\| = 1$ και $\vec{\gamma} = r\vec{\alpha}+s\vec{\beta}$, να αποδείξετε ότι $\|\vec{\gamma}\|=1$ αν και μόνον αν το $\vec{\gamma}$ είναι ίσο είτε με το $\vec{\alpha}$ είτε με το $\vec{\beta}$. (Μονάδες 1)

Θέμα 2:

(α) Στο χώρο δίδονται ένα επίπεδο (π) και δύο ευθείες (l_1) και (l_2) τέτοιες ώστε η (l_1) να είναι κάθετος στο (π) και η (l_2) να περιέχεται στο (π). Έστω O το σημείο τομής των (π) και (l_1), A σημείο της (l_1) και B σημείο της (l_2) τέτοιο ώστε (OB) κάθετος στην (l_2).
Να αποδειχθεί ότι (BA) κάθετος στην (l_2). (Μονάδες 0,8)

(β) Στο συνήθη χώρο $\mathbb{R}^3$ και ως προς στο ορθοκανονικό σύστημα αξόνων $Oxyz$ δίνεται η εξίσωση: E $(3\lambda+\mu)x+\lambda y-(\lambda+\mu)z+(\lambda+4\mu)=0$, $\lambda,\mu\in\mathbb{R}$, $|\lambda|+|\mu|\neq 0$. Να αποδειχθούν τα εξής:

(i) Η E είναι εξίσωση επιπέδου. (Μονάδες 0,5)

(ii) Τα επίπεδα $(\pi_1): 3x+y-z+1=0$ και $(\pi_2): x-z+4=0$ (για κατάλληλες τιμές των λ και μ) μπορούν να περιγραφούν από την E. (Μονάδες 0,6)

(iii) Όλα τα επίπεδα της E περιέχουν την ίδια σταθερή ευθεία (l), οι (συμμετρικές) εξισώσεις της οποίας να προσδιορισθούν. (Μονάδες 0,8)

(iv) Να προσδιορισθεί εξίσωση επιπέδου (π) που να διέρχεται από την αρχή O των αξόνων και να είναι κάθετο στα (π_1) και (π_2). (Μονάδες 0,4)

Υπάρχει (εκτός των (π_1) και (π_2)) άλλο επίπεδο που να περιγράφεται από την E και να είναι κάθετο στο επίπεδο (π); (Μονάδες 0,2)

Θέμα 3: Στο χώρο $\mathbb{R}^3$ και ως προς ένα ορθοκανονικό σύστημα συντεταγμένων $Oxyz$ θεωρούμε τα επίπεδα $(\pi_1): x+y+z=0$, $(\pi_2): x-2y+z=0$, $(\pi_3): x=z$ και, την κωνική επιφάνεια (S) με κορυφή την αρχή των αξόνων O και οδηγό καμπύλη $(C): \{y^2=-2x,\quad z=+1\}$.

(α) Να ευρεθεί η εξίσωση της (S) στη μορφή $f(x,y,z)=0$. (Μονάδες 1)

(β) Θεωρούμε το επίπεδο $(\pi): x-3y+z+1=0$ και την καμπύλη (γ) που προκύπτει ως τομή του (π) και (S). Να προσδιορισθεί το είδος της καμπύλης (γ). (Μονάδες 1,3)

(γ) Να αποδειχθεί ότι για τα σημεία P της (S) και μόνον γι' αυτά ισχύει η σχέση:
$[d(P,(\pi_1))]^2+[d(P,(\pi_2))]^2=[d(P,(\pi_3))]^2$. (Μονάδες 1)

Θέμα 4: Στο χώρο $\mathbb{R}^3$ δίνονται: η διγραμμική συνάρτηση
$\sigma: \mathbb{R}^3\times\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}: ((x,y,z),(x',y',z'))\mapsto\sigma((x,y,z),(x',y',z'))=2xx'-xz'-zx'+yy'+zz'$,
ο υπόχωρος $W=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3: y+z=0\}$ και το διάνυσμα $e_3=(0,0,1)$.

(α) Να αποδειχθεί ότι η σ είναι εσωτερικό γινόμενο επί του $\mathbb{R}^3$. (Μονάδες 1)

(β) Να ευρεθεί μια ορθογώνια (ως προς σ) βάση του W. (Μονάδες 1)

(γ) Να βρεθεί διάνυσμα $\upsilon\in W$ τέτοιο ώστε το διάνυσμα $u=e_3-\upsilon$ να είναι κάθετο στον υπόχωρο W (η καθετότητα ως προς σ). (Μονάδες 1,3)

Να απαντήσετε σε τρία από τα θέματα