ΑΝΑΛΥΤΙΚΗ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ (1 Οκτωβρίου 2007)

Θέμα 1:

(α) Αν για τα (μη μηδενικά) διανύσματα a και b του χώρου ισχύει η σχέση $\|\vec{a}\|+\|\vec{b}\|=\|\vec{a}+\vec{b}\|$, τότε να α
ότι τα $\vec{a}$ και $\vec{b}$ είναι συγγραμμικά. (Μονάδες 0,5)

(β) "Αν για τρία διανύσματα $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ του χώρου ισχύει η σχέση $\langle \vec{a}\times\vec{b},\vec{c}\rangle=0$, τότε τα $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ είναι συν
Αληθές ή Ψευδές; Δικαιολογείστε την απάντησή σας. (Μονάδες 0,5)

(γ) Στο συνήθη χώρο θεωρούμε το επίπεδο $(\pi): x-2y+z=0$ και το σημείο $M:\overrightarrow{OM}(1,1,1)$. Να βρείτε σημε
επιπέδου (π) τέτοια ώστε $\overrightarrow{OM}\perp\overrightarrow{ON}$ και $\|\overrightarrow{ON}\|=1$. (Μονάδα 1)

(δ) Στο επίπεδο $\mathbb{R}^2$ και ως προς ένα ορθοκανονικό σύστημα Oxy θεωρούμε την απ
$f:(x,y)\mapsto f(x,y)=((-x+2\kappa y)/2,(2\lambda x+y)/2)$, $\kappa,\lambda\in\mathbb{R}$ και $\kappa\lambda=3/4$. Να υπολογίσετε τα κ και
$\|f(x,y)\|=\|(x,y)\|$ $\forall\ x,y\in\mathbb{R}$. (Μονάδες 1,3)

Θέμα 2: Στο συνήθη χώρος $\mathbb{R}^3$ και ως προς ένα ορθοκανονικό σύστημα $Oxyz$ δίνεται η εξίσωση

$$(\Sigma): x^2+y^2+z^2-8x+6z-11=0.$$

(α) Να αποδειχθεί ότι η (Σ) παριστάνει σφαίρα, το κέντρο και την ακτίνα της οποίας να προσδιορίσετε. (Μονά

(β) Αν το επίπεδο (π) του χώρου έχει εξίσωση $2x-y+2z+5=0$

(i) Να αποδειχθεί ότι η τομή του (π) και της (Σ) είναι κύκλος το κέντρο και την ακτίνα του οποίου να πρ
σετε. (Μονάδες 0,7).

(ii) Να βρείτε την εξίσωση μιας σφαίρας που να είναι ομόκεντρη με την (Σ) και να εφάπτεται του (π). (Μ
0,6).

(γ) Να βρείτε το γεωμετρικό τόπο (Γ.Τ.) των σημείων M του χώρου που "βλέπουν" το ευθύγραμμο τμήμα με
σημεία $A(-1,\sqrt{7},-1)$ και $B(9,-\sqrt{7},5)$ με ορθή γωνία (δηλ. $A\hat{M}B=1^{\llcorner}$). (Μονάδα 1)

Θέμα 3: Στο χώρο $\mathbb{R}^3$ και ως προς ένα ορθοκανονικό σύστημα συντεταγμένων $Oxyz$ θεωρούμε: το σημείο K
$K(1,1,1)$
το διάνυσμα $\vec{\ell}(0,0,1)$, την καμπύλη $(C):\{(x-1)^2+(y-1)^2=1,\ z=0\}$ και την κωνική επιφάνεια (S) που έχει
το K και οδηγό καμπύλης την (C).

(α) Να ευρεθεί η εξίσωση της (S) στη μορφή $f(x,y,z)=0$. (Μονάδα 1)

(β) Να προσδιορίσετε το είδος της καμπύλης που προκύπτει ως τομή της (S) και του επιπέδου $(\pi): x+y+z=$
νάδες 1,3)

(γ) Να αποδείξετε ότι τα σημεία P του χώρου με την ιδιότητα τα διανύσματα $\overrightarrow{KP}$ και $\vec{\ell}$ να σχηματίζουν γω
είναι σημεία της επιφάνειας (S). (Μονάδα 1)

Θέμα 4: Στο χώρο $\mathbb{R}^3$ δίνονται: η συμμετρική διγραμμική συνάρτηση

$$q:\mathbb{R}^3\times\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}:((x,y,z),(x',y',z'))\mapsto\sigma((x,y,z),(x',y',z'))=3xx'+x'y+y'x+yy'+zz',$$

ο υπόχωρος $W:=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3: x+y=0\}$ και το διάνυσμα $e_2=(0,1,0)$.

(α) Να αποδειχθεί ότι η q είναι εσωτερικό γινόμενο επί του $\mathbb{R}^3$. (Μονάδες 0,7)

(β) Να ευρεθεί η ορθογώνια (ως προς q) βάση που προκύπτει με εφαρμογή της μεθόδου Gramm-Scmidt από τ
$\{(1,0,0),(1,-1,0),(0,0,1)\}$ του $\mathbb{R}^3$. (Μονάδες 1,3)

(γ) Να γραφεί το $e_2=w_1+w_2$, $w_1\in W$ και $w_2\in W^{\perp}$, (το ορθογώνιο $\perp$, ως προς q). (Μονάδες 1,3)

ΝΑ ΑΠΑΝΤΗΣΕΤΕ ΣΕ ΤΡΙΑ (3) ΑΠΟ ΤΑ ΘΕΜΑΤΑ