ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗ ΑΝΑΛΥΣΗ Ι

ΕΑΡΙΝΟ ΕΞΑΜΗΝΟ 2011-2012

ΠΕΡΙΟΔΟΣ ΙΟΥΝΙΟΥ

Σ. Νοτάρης

(Η βαθμολογική αξία κάθε ερωτήματος σε παρένθεση. Σύνολο μονάδων=105. Άριστα=100.)

1. **Σφάλματα στρογγύλευσης**

   (α) Πώς θα εκτιμήσετε ευσταθώς τις ακόλουθες παραστάσεις:

   (i) $\sqrt{1+2^{-k}a}-\sqrt{1-2^{-k}a}$, $0<a<2$, για $k>>1$. (4)

   (ii) $e^{x}-1$, για $|x|$ κοντά στο 0. (4)

   (β) Θέλουμε να υπολογίσουμε με ακρίβεια τους όρους της ακολουθίας $\{x_n\}$, όπου $x_{n+1}=\dfrac{(1-\gamma)^2}{4\gamma}x_n$, $n=0,1,2,\ldots$, $0<\gamma<1$, για δεδομένο x_0.

   Υποθέτοντας ότι, σε ένα συγκεκριμένο υπολογιστή, η ποσότητα $\dfrac{(1-\gamma)^2}{4\gamma}$ υπολογίζεται ακριβώς, ο προηγούμενος αναδρομικός τύπος γράφεται $\tilde{x}_{n+1}=\dfrac{(1-\gamma)^2}{4\gamma}\tilde{x}_n$, $n=0,1,2,\ldots$, $\tilde{x}_0=x_0+\epsilon$, όπου $\tilde{x}_n$ ο αριθμός μηχανής που προσεγγίζει το x_n και ϵ το σφάλμα στην προσέγγιση του x_0. Έστω $\epsilon_n=\tilde{x}_n-x_n$.

   (i) Δείξτε ότι $\epsilon_n=\left[\dfrac{(1-\gamma)^2}{4\gamma}\right]^n\epsilon$, $n=0,1,2,\ldots$. (7)

   (ii) Υποθέτοντας ότι ο συγκεκριμένος υπολογιστής εφαρμόζει απλή ακρίβεια IEEE, οπότε $\epsilon\cong 1.2\cdot 10^{-7}$, υπολογίστε το ϵ_{20} για $\gamma=0.1$. Ερμηνεύστε το αποτέλεσμά σας. (5)

   (iii) (Bonus) Για ποιά γ μεταξύ 0 και 1, ο αναδρομικός τύπος $x_{n+1}=\dfrac{(1-\gamma)^2}{4\gamma}x_n$ είναι ένας ευσταθής αλγόριθμος για τον υπολογισμό των όρων της ακολουθίας $\{x_n\}$, $n\geq 0$; (8)

2. **Επίλυση μη γραμμικών εξισώσεων**

   Θεωρήστε την εξίσωση $f(x)\equiv x-e\ln x-1=0$.

   (α) Δείξτε ότι η εξίσωση έχει ακριβώς δύο πραγματικές ρίζες, προσδιορίζοντας επακριβώς τη μία και δείχνοντας ότι η άλλη είναι στο διάστημα (5,6). (6)

   (β) Γράφουμε την εξίσωση στη μορφή $x=\phi(x)\equiv e\ln x+1$. Δείξτε ότι για κάθε $x_0\in[5,6]$, η ακολουθία $\{x_n\}$, $n\geq 0$, που παράγει η επαναληπτική μέθοδος $x_{n+1}=\phi(x_n)$, $n=0,1,2,\ldots$, συγκλίνει στη ρίζα της εξίσωσης στο διάστημα (5,6). (8)

(γ) Με $x_0 = 3$, υπολογίστε τον όρο x_1 της ακολουθίας $\{x_n\}$, $n \geq 0$, που δίνει η μέθοδος του Νεύτωνα. Δείξτε ότι η ακολουθία $\{x_n\}$, $n \geq 0$, συγκλίνει στη ρίζα της εξίσωσης στο διάστημα (5,6). (8)

3. Αριθμητική επίλυση γραμμικών συστημάτων

(α) Έστω $\|\cdot\|$ μια νόρμα του $\mathbb{R}^n$ και η επαγόμενη από αυτή φυσική νόρμα στον $\mathbb{R}^{n\times n}$. Έστω $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, A αντιστρέψιμος, $b \in \mathbb{R}^n$, $b \neq 0$, $x \in \mathbb{R}^n$ η λύση του γραμμικού συστήματος $Ax = b$ και θεωρούμε το διαταραγμένο σύστημα $(A + \delta A)(x + \delta x) = b$, όπου $\delta A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ με $\|A^{-1}\|\|\delta A\| < 1$ και $\delta x \in \mathbb{R}^n$.

(i) Δείξτε ότι $A + \delta A$ αντιστρέψιμος. (5)

(ii) Αν ισχύει ότι $\|\delta A\| \leq \mu\|A\|$, όπου μ μικρός θετικός αριθμός, δείξτε ότι

$$\frac{\|\delta x\|}{\|x\|} \leq \frac{\kappa\mu}{1 - \kappa\mu},$$

όπου $\kappa = \kappa(A)$ ο δείκτης κατάστασης του πίνακα A. Πώς ερμηνεύετε αυτήν την εκτίμηση; (Πλήρης απόδειξη.) (11)

(β) Αν $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, A αντιστρέψιμος, πώς θα υπολογίζατε με οικονομικό τρόπο τη λύση του γραμμικού συστήματος $Ax^{(i)} = x^{(i-1)}$, $i = 1, 2, 3, 4$, για δεδομένο $x^{(0)} \in \mathbb{R}^n$; Εκτιμήστε το πλήθος των πράξεων και των θέσεων μνήμης. (6)

4. Παρεμβολή

Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} 0, & -1 \leq x \leq 0, \\ x^2, & 0 < x \leq 1. \end{cases}$

(α) Υπολογίστε το πολυώνυμο p που παρεμβάλλεται στις τιμές της f στα σημεία $-1, 0$ και 1, καθώς και το σφάλμα $\max_{-1\leq x\leq 1} |f(x) - p(x)|$. (10)

(β) Συμπίπτει η f με την κυβική spline παρεμβολής s για τη συνάρτηση f στα σημεία $-1, 0$ και 1 και συνοριακές συνθήκες $s'(-1) = 0$, $s'(1) = 2$; (Πλήρης αιτιολόγηση.) (8)

5. Αριθμητική ολοκλήρωση

(α) Αν στο ολοκλήρωμα $\int_1^2 (x^3+1)dx$ εφαρμόσουμε το σύνθετο τύπο του Simpson με 20 υποδιαστήματα, μπορούμε να εγγυηθούμε ότι το σφάλμα θα είναι το πολύ $5 \cdot 10^{-7}$; (5)

(β) Θεωρούμε τον τύπο αριθμητικής ολοκλήρωσης εκ παρεμβολής

$$\int_{-1}^{1} f(x)dx = w_1 f(\sqrt{3}/3) + w_2 f(-\sqrt{3}/3) + R_2(f).$$

Ποιά από τα μονώνυμα x^i, $i = 0, 1, 2, 3, 4$, ο τύπος αυτός ολοκληρώνει ακριβώς; Τι συμπεραίνετε για το βαθμό ακρίβειας του; (10)

Η διάρκεια της εξέτασης είναι 2 ώρες 45 λεπτά.

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ