57. **[Άσκηση 57]** Θέματα εξετάσεων Φεβρουαρίου 2010

(α′) **Θέμα 1 Ομάδα Α**

Για κάθε μία από τις ακόλουθες προτάσεις, αποφανθείτε αν είναι σωστή ή λάθος. Οι απαντήσεις σας πρέπει να είναι πλήρως δικαιολογημένες.

i. Ο δακτύλιος $(\mathbb{Z}_{32}, +, \cdot)$ και ο δακτύλιος $(\mathbb{Z}_{60}, +, \cdot)$ έχουν το ίδιο πλήθος αντιστρεψίμων στοιχείων

ii. Η απεικόνιση $\phi : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{R}$ με $\phi(\alpha + \beta i) = \alpha$ για $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ είναι ομομορφισμός δακτυλίων

iii. Η ένωση δύο οποιονδήποτε ιδεωδών του δακτυλίου $\mathbb{Z}[x]$ είναι ιδεώδες του ιδίου δακτυλίου $\mathbb{Z}[x]$

iv. Δεν υπάρχει στοιχείο της συμμετρικής ομάδας S_5 το οποίο να έχει τάξη μεγαλύτερη του 5

v. Η τομή δύο οποιονδήποτε κυκλικών υποομάδων μιας ομάδας G είναι επίσης κυκλική υποομάδα της G

vi. Υπάρχει μοναδικό ανάγωγο πολυώνυμο $f(x) \in \mathbb{Z}_2[x]$ τέτοιο ώστε $f(1) = 0$

(β′) **Θέμα 1 Ομάδα Β**

Για κάθε μία από τις ακόλουθες προτάσεις, αποφανθείτε αν είναι σωστή ή λάθος. Οι απαντήσεις σας πρέπει να είναι πλήρως δικαιολογημένες.

i. Ο δακτύλιος $(\mathbb{Z}_{64}, +, \cdot)$ και ο δακτύλιος $(\mathbb{Z}_{120}, +, \cdot)$ έχουν το ίδιο πλήθος αντιστρεψίμων στοιχείων

ii. Η ένωση δύο οποιονδήποτε ιδεωδών του δακτυλίου $\mathbb{R}[x]$ είναι ιδεώδες του ιδίου δακτυλίου $\mathbb{R}[x]$

iii. Η τομή δύο οποιονδήποτε άπειρων υποομάδων μιας άπειρης κυκλικής ομάδας έχει άπειρο πλήθος στοιχείων.

iv. Δεν υπάρχει στοιχείο της συμμετρικής ομάδας S_7 το οποίο να έχει τάξη μεγαλύτερη του 7

v. Υπάρχει μοναδικό ανάγωγο πολυώνυμο $f(x) \in \mathbb{Z}_2[x]$ τέτοιο ώστε $f(1) = 0$

vi. Η απεικόνιση $\phi : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{R}$ με $\phi(\alpha + \beta i) = \beta$ για $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ είναι ομομορφισμός δακτυλίων

(γ′) **Θέμα 2 Ομάδα Α**

Δίνεται το πολυώνυμο $g(x) = x^2 + x + 1 \in \mathbb{Z}_3[x]$ και ο δακτύλιος -πηλίκο $\frac{\mathbb{Z}_3[x]}{<g(x)>}$

i. Να αναλύσετε το $g(x)$ σε γινόμενο αναγώγων πολυωνύμων του $\mathbb{Z}_3[x]$

ii. Πόσα στοιχεία έχει ο δακτύλιος R;

iii. Να δείξετε ότι το $-x+ < g(x) >$ είναι αντιστρέψιμο στοιχείο του R και να υπολογίσετε την τάξη του στοιχείου αυτού στην ομάδα $U(R)$ των αντιστρεψίμων στοιχείων του R.

(δ′) **Θέμα 2 Ομάδα Β**

Δίνεται το πολυώνυμο $g(x) = x^2 - x + 1 \in \mathbb{Z}_3[x]$ και ο δακτύλιος -πηλίκο $\frac{\mathbb{Z}_3[x]}{<g(x)>}$

i. Να αναλύσετε το $g(x)$ σε γινόμενο αναγώγων πολυωνύμων του $\mathbb{Z}_3[x]$

ii. Πόσα στοιχεία έχει ο δακτύλιος R;

iii. Να δείξετε ότι το $x+ < g(x) >$ είναι αντιστρέψιμο στοιχείο του R και να υπολογίσετε την τάξη του στοιχείου αυτού στην ομάδα $U(R)$ των αντιστρεψίμων στοιχείων του R.

(ε′) **Θέμα 3 Ομάδα Α**

Δίνονται τα πολυώνυμα $f(x) = x^4 - 1$ και $g(x) = x^9 - 1$ του $\mathbb{C}[x]$

i. Να υπολογίσετε τον Μέγιστο Κοινό Διαιρέτη $d(x)$ των $f(x)$ και $g(x)$ και να βρείτε πολυώνυμα $\lambda(x), \mu(x) \in \mathbb{C}[x]$, τέτοια ώστε $d(x) = \lambda(x)f(x) + \mu(x)g(x)$

ii. Να βρείτε πολυώνυμα $\alpha(x), \beta(x) \in \mathbb{C}[x]$ τέτοια ώστε $x^{2010} - 1 = \alpha(x)f(x) + \beta(x)g(x)$.

iii. Να δείξετε ότι το σύνολο G των μιγαδικών ριζών του $g(x)$ αποτελεί ομάδα με πράξη τον πολλαπλασιασμό των μιγαδικών αριθμών

iv. Να υπολογίσετε την τάξη της ομάδας G και να δείξετε ότι έχει μία τουλάχιστον υποομάδα διαφορετική από τις υποομάδες $\{1\}$ και G

(ϛ′) **Θέμα 3 Ομάδα Β**

Δίνονται τα πολυώνυμα $f(x) = x(x^4 - 1)$ και $g(x) = x^9 - 1$ του $\mathbb{C}[x]$

i. Να υπολογίσετε τον Μέγιστο Κοινό Διαιρέτη $d(x)$ των $f(x)$ και $g(x)$ και να βρείτε πολυώνυμα $\lambda(x), \mu(x) \in \mathbb{C}[x]$, τέτοια ώστε $d(x) = \lambda(x)f(x) + \mu(x)g(x)$

ii. Να βρείτε πολυώνυμα $\alpha(x), \beta(x) \in \mathbb{C}[x]$ τέτοια ώστε $x^{2010} - 1 = \alpha(x)f(x) + \beta(x)g(x)$.

iii. Να δείξετε ότι το σύνολο G των μιγαδικών ριζών του $g(x)$ αποτελεί ομάδα με πράξη τον πολλαπλασιασμό των μιγαδικών αριθμών

iv. Να υπολογίσετε την τάξη της ομάδας G και να δείξετε ότι έχει μία τουλάχιστον υποομάδα διαφορετική από τις υποομάδες $\{1\}$ και G

(ζ′) **Θέμα 4 Ομάδα Α**

Δίνεται η κυκλική μετάθεση $\tau = (123456789\ 10) \in S_{10}$

i. Γράψτε τις μεταθέσεις τ^2 και τ^5 ως γινόμενα ξένων κύκλων.

ii. Ποιές από τις μεταθέσεις τ^κ για $\kappa \in \{1, 2, 3, \cdots, 10\}$ έχουν τάξη ίση με 5;

iii. Να αποφανθείτε εάν η μετάθεση τ είναι άρτια ή περιττή και να δείξετε ότι δεν υπάρχει μετάθεση $\sigma \in S_{10}$ τέτοια ώστε $\sigma^2 = \tau$

(η′) **Θέμα 4 Ομάδα Β**

Δίνεται η κυκλική μετάθεση $\tau = (123456789\ 10) \in S_{10}$

i. Γράψτε τις μεταθέσεις τ^2 και τ^5 ως γινόμενα ξένων κύκλων.

ii. Ποιές από τις μεταθέσεις τ^κ για $\kappa \in \{1, 2, 3, \cdots, 10\}$ έχουν τάξη ίση με 5;

iii. Να αποφανθείτε εάν η μετάθεση τ είναι άρτια ή περιττή και να δείξετε ότι δεν υπάρχει μετάθεση $\sigma \in S_{10}$ τέτοια ώστε $\sigma^2 = \tau$

Τελευταία ενημέρωση: 10 Φεβρουαρίου 2010