ΒΑΣΙΚΗ ΑΛΓΕΒΡΑ
Εξετάσεις Ιουνίου 2010

Θέμα 1. ($1+0.5+0.5=2$ μονάδες)
(i) Έστω $n \in \mathbf{N}$ ένας φυσικός αριθμός. Να δειχτεί ότι $7^n \equiv 1 \pmod{20}$ αν και μόνο αν ο n είναι ένα πολλαπλάσιο του 4.
(ii) Πότε λέμε ότι το ιδεώδες I ενός μεταθετικού δακτυλίου R είναι κύριο;
(iii) Είναι το ιδεώδες $I=\{10x+15y+35z : x,y,z \in \mathbf{Z}\}$ του δακτυλίου $\mathbf{Z}$ των ακεραίων κύριο; Εξηγήστε.

Θέμα 2. ($1+1=2$ μονάδες)
(i) Έστω $\alpha \in S_n$ μια μετάθεση με περιττή τάξη. Να δειχτεί ότι η α είναι άρτια, δηλαδή ότι $\alpha \in A_n$.
(ii) Έστω G μια πεπερασμένη ομάδα με περιττή τάξη και $g \in G$ ένα στοιχείο της. Να δειχτεί ότι $g \in <g^2>$, όπου $<g^2>$ είναι η κυκλική υποομάδα της G που παράγεται από το g^2.

Θέμα 3. ($1+1=2$ μονάδες)
Έστω $R=\mathbf{M}_2(\mathbf{C})$ ο δακτύλιος των 2×2 μιγαδικών πινάκων, $S \subseteq R$ ο υποδακτύλιος των άνω τριγωνικών πινάκων και $I=\left\{\begin{pmatrix} 0 & a \\ 0 & 0 \end{pmatrix} : a \in \mathbf{C}\right\}$.
(i) Είναι το I ένα ιδεώδες του S; Εξηγήστε.
(ii) Είναι το I ένα ιδεώδες του R; Εξηγήστε.

Θέμα 4. ($1+1=2$ μονάδες)
Έστω $f: G \longrightarrow H$ ένας ομομορφισμός ομάδων και $H_0=\operatorname{im} f$ η εικόνα του.
(i) Αν η ομάδα G είναι κυκλική, να δειχτεί ότι η ομάδα H_0 είναι επίσης κυκλική.
(ii) Αν $[G:\ker f]=n \in \mathbf{N}$, να δειχτεί ότι $h^n=1$ για κάθε $h \in H_0$.

Θέμα 5. ($0.5+1.5=2$ μονάδες)
Έστω $R=\mathbf{Z}_5[X]/I$, όπου $I=(X^2+1) \subseteq \mathbf{Z}_5[X]$ είναι το ιδεώδες που παράγεται από το πολυώνυμο $X^2+1 \in \mathbf{Z}_5[X]$.
(i) Είναι ο δακτύλιος R ακέραια περιοχή;
(ii) Ποια από τα στοιχεία $a,b \in R$, όπου $a=X+I$ και $b=X^2+2X+I$, είναι αντιστρέψιμα; Για αυτά που είναι αντιστρέψιμα, βρείτε τον αντίστροφό τους.

Καλή επιτυχία!