ΙΟΥΝΙΟΣ 2002

Θέμα 1ο:

Α) Δίνεται ο πίνακας $A = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \in \Re^{2x2}$. **i)** Να γίνει άνω τριγωνικός R με χρήση του πίνακα περιστροφής Q_θ. **ii)** Να προσδιοριστεί η παραγοντοποίηση A = QR, όπου Q ορθογώνιος και R άνω τριγωνικός. **iii)** Με τη βοήθεια της παραγοντοποίησης αυτής να επιλυθεί το σύστημα $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$, $\mathbf{b}=[2,6]'$.

Β) Έστω $A \in C^{n\times n}$ και $F(A) = \{\mathbf{x}^* A\mathbf{x}: \mathbf{x} \in C^n : \mathbf{x}^*\mathbf{x} = 1\}$. Αν σ(A) είναι το φάσμα του A δείξτε ότι $\sigma(A) \subset F(A)$.

Θέμα 2ο:

Α) Έστω $A \in \Re^{m\times n}$, P, $Q \in \Re^{n\times n}$ ορθογώνιοι. Να αποδείξετε ότι: **i)** $\|A\|_2 = \|PAQ\|_2$. **ii)** $\|A\|_2 = \|PAQ\|_2$, δηλαδή η Ευκλείδεια νόρμα και η φασματική νόρμα είναι ορθογώνια αναλλοίωτες.

Β) Έστω $A \in \Re^{n\times n}$ και έστω $A = U\Sigma V^T$ η ανάλυση των ιδιαζουσών τιμών του , όπου $\Sigma = \mathrm{diag}(\sigma_i)$, $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq ... \geq \sigma_n$. Να αποδείξετε ότι: **i)** $\|A\|_2 = \sigma_1$. **ii)** $\|A\|_2 = (\sigma_1^2+\sigma_2^2+...+\sigma_\nu^2)^{\frac{1}{2}}$. **iii)** $\|A^{-1}\|_2 = \frac{1}{\sigma_n}$. **iv)** $\kappa_2(A) = \|A\|_2 \|A^{-1}\|_2 = \frac{\sigma_1}{\sigma_n}$.

Γ) Έστω ο πίνακας $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ μη ιδιάζων. Ορίζουμε την ποσότητα $\sigma = \frac{a^2+b^2+c^2+d^2}{2|ad-bc|}$. **i)** Εκφράστε τη σ συναρτήσει της Ευκλείδειας νόρμας και της ορίζουσας του Α. **ii)** Με τη βοήθεια της ανάλυσης ιδιαζουσών τιμών του Α αποδείξτε ότι: $\kappa_2(A) = \|A\|_2 \|A^{-1}\|_2 = \sigma + \sqrt{\sigma^2 - 1}$.

Θέμα 3ο:

Α) Έστω P, $Q \in C^{n\times n}$ πίνακες με διακεκριμένες ιδιοτιμές. Δείξτε ότι οι πίνακες P και Q έχουν τα ίδια ιδιοδιανύσματα τότε και μόνον τότε εάν αντιμετατίθενται.

Β) Έστω A, $B \in \Re^{n\times n}$ τετραγωνικοί πίνακες με $A^T B = 0$. Αν X και Y είναι ο χώρος στηλών των πινάκων A και B αντίστοιχα να δείξετε ότι $X \perp Y$.

Θέμα 4ο:

Α) Δίνεται η εξίσωση διαφορών $\mathbf{u}_{k+1} = A\mathbf{u}_k$, $A \in \Re^{3\times 3}$, $\kappa \in N$ και $\mathbf{u}_0 \in \Re^n$ δοσμένη αρχική συνθήκη. Αν ο πίνακας Α έχει διακεκριμένες ιδιοτιμές να εκφραστεί η λύση $\mathbf{u}_k$ της εξίσωσης συναρτήσει των ιδιοτιμών και των ιδιοδιανυσμάτων του Α. Να εκφραστεί η αναγκαία και ικανή συνθήκη ώστε για τη λύση $\mathbf{u}_k$ που θα βρείτε να ισχύει: $\lim_{n\to\infty} \mathbf{u}_k = 0$.

Β) Ένας πίνακας $A \in \Re^{6\times 6}$ έχει ιδιοτιμές $\lambda_1 = -2$, $\lambda_2 = -3$ με αντίστοιχες αλγεβρικές πολλαπλότητες $\tau_1 = 1$, $\tau_2 = 5$. Για την ιδιοτιμή λ_2 έστω ότι $r_1 = 4$, $r_2 = 2$, $r_3 = 1$, $r_4 = 1$ ($r_i = \mathrm{rank}(A-\lambda_0)^i$, i = 1, 2,...). **i)** Με χρήση της χαρακτηριστικής Segre και του διαγράμματος Ferrer να βρεθεί η κανονική μορφή Jordan J_A του πίνακα Α. **ii)** Να γράψετε (χωρίς επεξηγήσεις) τον πίνακα $e^{J_A t}$ καθώς και το $\lim_{t\to\infty} e^{J_A t}$