ΙΟΥΝΙΟΣ 2003

Θέμα 1ο:

Α) Αν $A, B \in R^{n\times n}$ συμμετρικοί πίνακες να δείξετε ότι ο πίνακας $AB - BA$ είναι αντισυμμετρικός. Αν ο n είναι περιττός αριθμός να δείξετε ότι ο $AB - BA$ δεν είναι αντιστρέψιμος.

Β) Αν $A \in R^{n\times n}$ είναι συμμετρικός πίνακας και ο $A^2 = 0$, να δείξετε ότι $A = 0$.

Γ) Έστω $\lambda_1, \lambda_2, \ldots\ldots, \lambda_r \in R$, $r < n$ οι μη μηδενικές ιδιοτιμές ενός πίνακα $A \in R^{n\times n}$ απλής δομής. Να δειχθεί ότι:

i) $rankA = r$, **ii)** $rankA \geq \dfrac{(TrA)^2}{(TrA^2)}$.

(Υπόδειξη: Για την απόδειξη της (ii) χρησιμοποιήστε κατάλληλα την ανισότητα Cauchy-Schwartz).

Θέμα 2ο:

Α) Ένας πίνακας $A \in R^{8\times 8}$ έχει χαρακτηριστικό πολυώνυμο $\phi(\lambda) = (\lambda-3)^2(\lambda-2)^2(\lambda^2+9)^2$ και ελάχιστο πολυώνυμο $m(\lambda) = (\lambda-3)(\lambda-2)^2(\lambda^2+9)^2$. Να βρεθούν (με αιτιολόγηση) η πραγματική και η μιγαδική μορφή Jordan του Α.

Β) **i)** Αν $A = \begin{bmatrix} \lambda_0 & 1 & 0 \\ 0 & \lambda_0 & 1 \\ 0 & 0 & \lambda_0 \end{bmatrix}$, $\lambda_0 \in C$ να υπολογισθεί (με απόδειξη) ο πίνακας e^{At}. **ii)** Να διατυπωθούν οι ικανές και αναγκαίες συνθήκες ώστε $\lim_{t\to\infty} e^{At} = 0$.

Θέμα 3ο:

Α) Αν $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -1 & 5 & -4 \\ 2 & -4 & 14 \end{bmatrix}$, να δειχθεί με τη μέθοδο Cholesky ότι ο Α είναι θετικά ορισμένος και να λυθεί με τον αλγόριθμο Cholesky το σύστημα $A\vec{x} = \vec{b}$, όπου $\vec{b} = [0 \quad -6 \quad 6]^t$.

Β) Αν $A \in C^{n\times n}$ και $P, Q \in C^{n\times n}$ μοναδιαίοι (unitary) πίνακες, να δείξετε ότι: **i)** $\|PA\|_2 = \|A\|_2$, **ii)** $\|PAQ\|_2 = \|A\|_2$, όπου $\|\cdot\|_2$ είναι η l_2-(ευκλείδεια) νόρμα πινάκων.

Θέμα 4ο:

Α) Αν $A = \begin{bmatrix} B & C \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, όπου $A \in C^{n\times n}$, $B \in C^{k\times k}$, $C \in C^{k\times(n-k)}$ k<n, να δείξετε ότι: Ο Α είναι κανονικός $(\leftrightarrow AA^* = A^*A)$ τότε και μόνον τότε αν Β είναι κανονικός και $C = 0$.

Β) Έστω πίνακας $A \in R^{7\times 7}$ με κανονική μορφή Jordan $J_A = \left[\begin{array}{cc|c|cc|cc} 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$. **i)** Να βρεθούν το χαρακτηριστικό και το ελάχιστο πολυώνυμο του A. **ii)** Να αιτιολογηθεί γιατί υπάρχει ο αντίστροφος του A και να δειχθεί ότι: $A^{-1} = -\frac{1}{4}\left(A^3 - 6A^2 + 13A - 12I_7\right)$ **iii)** Να λυθεί το πρόβλημα αρχικών τιμών: $\left(\vec{x}(t)\right)' = J_A\,\vec{x}(t)$, $\vec{x}(0) = [1 \quad 1 \quad 1 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0]^t$.