ΙΟΥΝΙΟΣ 2005

Θέμα 1^o: α) Έστω πίνακας $A \in \Re^{9\times 9}$ με χαρακτηριστικό πολυώνυμο
$\varphi(\lambda)=\lambda(\lambda-1)^2(\lambda+2)^2(\lambda^2-2\lambda+2)$ και ελάχιστο $m(\lambda)=\lambda(\lambda-1)(\lambda+2)^2(\lambda^2-2\lambda+2)^2$
Ι) Να βρεθούν με πλήρη αιτιολόγηση η πραγματική και η μιγαδική μορφή Jordan του Α.
ΙΙ)Είναι ο πίνακας Α αντιστρέψιμος;

β) Να δειχτεί με την μέθοδο Cholesky ότι ο πίνακας $A=\begin{bmatrix} 4 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 6 \end{bmatrix}$ είναι θετικά ορισμένος και να λυθεί με τον αλγόριθμο Cholesky το σύστημα Ax=b με $b=\begin{bmatrix} 12 \\ -2 \\ 8 \end{bmatrix}$

Θέμα 2^o: α) Δίνεται ο πίνακας $A=\begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 3 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$.

Ι) Να υπολογιστούν οι ιδιάζουσες τιμές, τα δεξιά και τα αριστερά ιδιάζοντα διανύσματα του Α.
ΙΙ) Να βρεθούν ορθογώνιοι πίνακες U και V κατάλληλων διαστάσεων και διαγώνιος πίνακας $\Sigma \in \Re^{3\times 2}$, τέτοιοι ώστε $A=U\Sigma V^t$
β) Αν οι πίνακες Α και Β είναι όμοιοι, δείξτε ότι dim(kerA)=dim(kerB).

Θέμα3ο: α) Αν $\|\cdot\|$ είναι μια νόρμα πινάκων και $A \in \Re^{n\times n}$ (ή $C^{n\times n}$), τότε $\rho(A) \le \|A\|$, όπου ρ(Α) είναι η φασματική ακτίνα του Α.
β) Έστω πίνακας $A \in \Re^{5\times 5}$ με $\sigma(A^t,A)=\left\{\frac{1}{4},\frac{2}{5},\frac{9}{16},\frac{1}{3},\frac{1}{5}\right\}$.Αν ρ(Α) είναι η φασματική ακτίνα του πίνακα Α, δείξτε ότι $\rho(A) \le \frac{3}{4}$
γ) ΣΩΣΤΟ Ή ΛΑΘΟΣ

ι) Ένας πίνακας $A \in C^{n\times n}$ έχει μόνο πραγματικές θετικές ιδιοτιμές, εάν και μόνο αν είναι θετικά ορισμένος.

ιι) Αν ένας πίνακας δεν είναι αντιστρέψιμος τότε έχει μοναδική ιδιοτιμή το 0.

ιιι) Αν δύο $n \times n$ πίνακες έχουν τις ίδιες ιδιοτιμές (με τις ίδιες αλγεβρικές πολλαπλότητες) τότε είναι ισοδύναμες.

ιν) Αν δύο πίνακες έχουν το ίδιο rank τότε είναι όμοιοι.

ν) Ένας πίνακας $A \in C^{n\times n}$ είναι αντιστρέψιμος αν και μόνο αν kerA={0} νι) Αν ένας συμμετρικός πίνακας $A \in \Re^{n\times n}$ είναι αρνητικά ορισμένος τότε έχει αρνητικές ιδιάζουσες τιμές.

νιι) Σύμφωνα με το θεώρημα Schur, κάθε πίνακας $A \in C^{m\times n}$ είναι ορθογώνια όμοιος με διαγώνιο πίνακα.

νιιι) Αν $A \in \Re^{n\times n}$ και $P^{-1}AP=J$, όπου $P \in \Re^{n\times n}$ αντιστρέψιμος, τότε $P^{-1}A^{k}P=J^{k}$, για κ=0,1,2…

ιχ) Αν $A,B \in \Re^{n\times n}$ ορθογώνιοι πίνακες, τότε A+B ορθογώνιος

χ) Αν $A,B \in \Re^{n\times n}$ συμμετρικοί πίνακες, τότε A+B συμμετρικός.

<u>Θέμα 4°:</u> α) Έστω $A,M \in C^{n\times n}$ με τον A θετικά ορισμένο (δηλαδή $\overline{x}^{*}A\overline{x} > 0$, για κάθε $\overline{x} \in C^{n}, \overline{x} \neq \overline{0}$ και ο A είναι συμμετρικός). Αν $AM+M^{*}A=-I_{n}$ και $M\overline{x}=\lambda\overline{x}$, να δείξετε ότι Reλ<0.

β) Να δειχτεί ότι οι ιδιοτιμές ενός πίνακα $A \in C^{n\times n}$ ερμιτιανού ($A^{*}=A$) είναι πραγματικές.

γ) Να δειχτεί ότι οι ιδιοτιμές ενός πίνακα $A \in C^{n\times n}$ αντιερμιτιανού ($A^{*}=-A$) είναι καθαρά φανταστικές.