ΜΑΘΗΜΑ: ΛΟΓΙΣΜΟΣ ΠΙΝΑΚΩΝ ΚΑΙ ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ **ΑΘΗΝΑ 27.6.20008**

ΘΕΜΑ 1. α) Έστω ο πίνακας $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ Αν $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ είναι οι ιδιοτιμές του, δείξτε ότι

$$\lambda_1 \cdot \lambda_2 \cdot \lambda_3 = 1, \quad \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 0$$

β) Έστω $P \in R^{n\times n}$ ορθογώνιος πίνακας. I) Να δειχθεί ότι ο P διατηρεί το μήκος και τη γωνία των διανυσμάτων του R^n (ως προς τη διανυσματική νόρμα l_2). II) Κάθε ιδιοτιμή του P έχει απόλυτη τιμή 1. III) Κάθε ζεύγος ιδιοδιανυσμάτων του P που αντιστοιχούν σε διαφορετικές ιδιοτιμές είναι ορθογώνια.

ΘΕΜΑ 2. α) Εστω $A \in R^{m\times n}$ και έστω $A = USV^T$ η ανάλυση ιδιαζουσών τιμών του. Αποδείξτε ότι οι στήλες του U που αντιστοιχούν στις μη μηδενικές ιδιάζουσες τιμές αποτελούν μία ορθοκανονική βάση για το $R(A)$ ενώ εκείνες που αντιστοιχούν στις μηδενικές αποτελούν μία ορθοκανονική βάση για το $Ker(A^T)$ β) Να υπολογισθούν οι ιδιάζουσες τιμές και τα αριστερά και δεξιά ιδιάζοντα διανύσματα του πίνακα $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$

ΘΕΜΑ 3. α) Αν $A = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ δείξτε χωρίς πράξεις ότι: $A^3 + A^2 = 25A + 25I_2$ β) Αν

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -4 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}$$

είναι η ανάλυση του A στην κανονική μορφή Jordan, υπολογίστε τους πίνακες A^{10}, e^{At} στηριζόμενοι στην ανάλυση αυτή.

ΘΕΜΑ 4. α) Έστω $A \in C^{n\times n}$ και $F(A) = \{x^* AX : x \in C^n, x^* x = 1\}$. Εάν $\sigma(A)$ είναι το φάσμα του A, δείξτε ότι $\sigma(A) \subset F(A)$

β) Δίνεται η εξίσωση διαφορών $u_{k+1} = Au_k, A \in R^{3\times 3}, k \in N$, όπου $u_0 \in R^3$ δοσμένη αρχική συνθήκη. Αν ο πίνακας A έχει διακεκριμένες ιδιοτιμές, να εκφρασθεί η λύση u_k της εξίσωσης συναρτήσει των ιδιοτιμών και των ιδιοδιανυσμάτων του A. Να διατυπωθεί η αναγκαία και ικανή συνθήκη ώστε για τη λύση u_k που θα βρείτε να ισχύει

$$lim_{k\to\infty} u_k = 0$$

ΘΕΜΑ 5. α) Δίνεται ο πίνακας $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -1 & 5 & -4 \\ 2 & -4 & 14 \end{bmatrix}$

Να δειχθεί με τη μέθοδο Cholesky ότι ο A είναι θετικά ορισμένος και να λυθεί με τον αλγόριθμο Cholesky το σύστημα

$$A\underline{x} = \underline{b}, \quad \underline{b} = [0, -6, -6]^t$$

β) Έστω πίνακας $A \in R^{7\times 7}$ με κανονική μορφή Jordan

$$J_A = diag\{\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}, 2, \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\}$$

(i) Να βρεθούν το χαρακτηριστικό και το ελάχιστο πολυώνυμο του A.

(ii) Να αιτιολογηθεί γιατί υπάρχει ο αντίστροφος του A και να δειχθεί ότι:

$$A^{-1} = -\frac{1}{4}(A^3 - 6A^2 + 13A - 12I_7)$$

Απαντήστε σε τέσσερα (4) θέματα. Κ Α Λ Η Ε Π Ι Τ Υ Χ Ι Α