ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

ΛΟΓΙΣΜΟΣ ΠΙΝΑΚΩΝ ΚΑΙ ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ
ΠΕΡΙΟΔΟΣ ΙΟΥΝΙΟΥ 2009 (1.7.2009)

ΘΕΜΑ 1

(α) Έστω πίνακας $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ και V διανυσματικός υπόχωρος του $\mathbb{R}^n$, με $\dim V = d < n$. Αν $\{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots \boldsymbol{v}_d\}$ είναι μία βάση του V και $P = [\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots \boldsymbol{v}_d]$ ο πίνακας βάση του V, να δείξετε ότι: ο V είναι A-αναλλοίωτος εάν και μόνο εάν $AP = P\tilde{A}$, όπου $\tilde{A} \in \mathbb{R}^{d\times d}$.

(β) Αν $\lambda_1 \in \mathbb{R}$ είναι ιδιοτιμή του πίνακα A και $\{\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{u}_3\}$ είναι μία αλυσίδα ιδιοδιανυσμάτων της ιδιοτιμής λ_1 μήκους 3, όπου $\boldsymbol{u}_1$ απλό, $\boldsymbol{u}_2$ γενικευμένο δεύτερης τάξης και $\boldsymbol{u}_3$ γενικευμένο ιδιοδιάνυσμα τρίτης τάξης, να δείξετε ότι ο διανυσματικός χώρος $V = \langle \boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{u}_3 \rangle$ είναι A-αναλοίωτος. Στη συνέχεια να βρεθεί σύμφωνα με το ερώτημα (α) ο πίνακας $\tilde{A}$.

ΘΕΜΑ 2. Έστω πίνακας $A \in \mathbb{R}^{7\times 7}$ με χαρακτηριστικό πολυώνυμο $\varphi(\lambda) = (\lambda+2)^4(\lambda+1)^3$.

Αν $rank[A + 2I_7] = 4$ και $rank[A + I_7] = 6$, τότε

(α) Να βρεθεί η κανονική μορφή Jordan J_A του πίνακα A.

(β) Να υπολογισθεί το ελάχιστο πολυώνυμο $m(\lambda)$ του A.

(γ) Να αποδειχθεί ότι υπάρχει ο αντίστροφος του A και ότι $A^{-1} = -\frac{1}{4}(A^4 + 7A^3 + 19A^2 + 25A + 16I_7)$.

(δ) Να λυθεί το πρόβλημα αρχικών τιμών $x'(t) = J_A x(t)$, $x(0) = x_0 \in \mathbb{R}^7$ και να βρεθεί το $\lim_{t\to+\infty} x(t)$.

ΘΕΜΑ 3

(α) Έστω $A \in \mathbb{R}^{m\times m}$ και $A = U\Sigma V^T$ η ανάλυση ιδιαζουσών τιμών του, όπου

$U = [\underline{u}_1, \ldots, \underline{u}_m]$, $V = [\underline{v}_1, \ldots \underline{v}_m]$, $\Sigma = diag\{\sigma_1, \ldots \sigma_\rho\}$ $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \ldots \geq \sigma_r > \sigma_{r+1} = \ldots = \sigma_\rho = 0$.

Αποδείξτε ότι:

(i) $rank(A) = r$, (ii) $\ker(A) = span\{\underline{v}_{r+1}, \ldots \underline{v}_m\}$,

(iii) $R(A) = span\{\underline{u}_1, \ldots, \underline{u}_r\}$, (iv) $\|A\|_2 = \sigma_1$.

(β) Δίνεται το τρίγωνο $A(-4,1)$, $B(-1,-3)$, $\Gamma(-6,-2)$. Να προσδιορίσετε την ανάκλασή του ως προς την ευθεία $y = -x$.

ΘΕΜΑ 4

(α) (i) Έστω $A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}$, A αντιστρέψιμος. Αν $\|\cdot\|$ είναι μία επαγόμενη νόρμα πινάκων και $\|A - B\| < \dfrac{1}{\|A^{-1}\|}$ να δείξετε ότι ο B είναι αντιστρέψιμος.

(ii) Εάν $B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ μη αντιστρέψιμος τότε $\dfrac{1}{k(A)} \leq \dfrac{\|A - B\|}{\|A\|}$ $(k(A) = \|A\| \cdot \|A^{-1}\|)$.

(β) Να επιλυθεί το σύστημα $Ax = b$, όπου $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$, $b = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ χρησιμοποιώντας ορθογώνιους μετασχηματισμούς.

Να απαντήσετε και στα (4) βαθμολογικά ισοδύναμα θέματα

ΟΝΟΜΑΤΕΠΩΝΥΜΟ: ....

Α.Μ.: ....

Καλή επιτυχία!