ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

ΛΟΓΙΣΜΟΣ ΠΙΝΑΚΩΝ ΚΑΙ ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ
ΠΕΡΙΟΔΟΣ ΙΟΥΝΙΟΥ 2011 (16.6.2011)

Θ1. α) Δίνεται ο πίνακας $A=\begin{bmatrix}0 & 1\\ 1 & 2\end{bmatrix}\in\mathbb{R}^{2\times 2}$. Να προσδιοριστεί η παραγοντοποίηση $A=Q\cdot R$, όπου Q ορθογώνιος και R άνω τριγωνικός. Με τη βοήθεια της παραγοντοποίησης αυτής να επιλυθεί το σύστημα $Ax=b,\ b=\begin{bmatrix}2\\ 6\end{bmatrix}$.

β) Δίνεται το τρίγωνο $\mathrm{A}(-1,4),\ \mathrm{B}(3,1),\ \Gamma(2,6)$. Με τη βοήθεια κατάλληλου μετασχηματισμού πινάκων προσδιορίστε την ανάκλασή του ως προς την ευθεία $y=-x$.

Θ2. α) Έστω $A\in\mathbb{R}^{n\times n}$ συμμετρικός πίνακας με ιδιοτιμές $\lambda_1,\lambda_2,\ldots\lambda_n$. Αποδείξτε ότι οι ιδιάζουσες τιμές του A είναι $|\lambda_i|,\ i=1,n$ και η φασματική νόρμα $\|A\|_2:=\max\limits_{1\le i\le n}|\lambda_i(A)|$.

β) Αν $A=\begin{bmatrix}3 & -2\\ -4 & 3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2 & 1\\ 0 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3 & 2\\ 4 & 3\end{bmatrix}$ είναι η ανάλυση του A στην κανονική μορφή Jordan, υπολογίστε τους πίνακες A^{10}, e^{At} στηριζόμενοι στην ανάλυση αυτή.

Θ3. α) Δίνεται ο πίνακας $A=\begin{bmatrix}2 & 2 & -4\\ 1 & -3 & 1\\ 2 & -2 & -4\end{bmatrix}$. Να υπολογίσετε την ορίζουσα και τον αντίστροφο του A με τη μέθοδο Gauss-Jordan.

β) Έστω το γραμμικό σύστημα $Ax=b$, $A\in\mathbb{R}^{n\times n}$ μη ιδιάζον $b\in\mathbb{R}^n-\{0\}$. Αν διατάραξη δb του διανύσματος b προκαλεί διατάραξη κατά δx του διανύσματος x, να δειχθεί ότι $\frac{1}{k(A)}\frac{\|\delta b\|}{\|b\|}\le\frac{\|\delta x\|}{\|x\|}\le k(A)\frac{\|\delta b\|}{\|b\|}$, όπου $\|\cdot\|$ οποιαδήποτε διανυσματική νόρμα και *k(A)* ο δείκτης κατάστασης του A ως προς τη νόρμα πινάκων που επάγεται από την $\|\cdot\|$.

Θ4. α) Έστω πίνακας $A\in\mathbb{R}^{n\times n}$ και *k(A)* ο δείκτης κατάστασής του. Αποδείξτε ότι $k(A)\ge 1$ και $k_2(A^tA)=[k_2(A)]^2$ ($\|\cdot\|_2$ είναι η φασματική νόρμα του πίνακα). Εάν $U\in\mathbb{R}^{n\times n}$ ορθογώνιος πίνακας αποδείξτε ότι $k_2(U)=1$.

β) Να υπολογισθεί ο ψευδοαντίστροφος A^+ του πίνακα $A=\begin{bmatrix}1 & 1\\ 0 & 2\\ 2 & 0\end{bmatrix}$ με χρήση της ανάλυσης ιδιαζουσών τιμών του.

Θ5. α) Έστω πίνακας $A\in\mathbb{R}^{6\times 6}$ με χαρακτηριστικό πολυώνυμο $\varphi(\lambda)=(\lambda+2)(\lambda+3)^5$. Για την ιδιοτιμή λ_2 έστω ότι $r_1=4,\ r_2=2,\ r_3=1,\ r_4=1$ (r_i=rank$(A-\lambda_2 I_6)^i$, $i=1,2,\ldots$). Να βρεθεί η κανονική μορφή Jordan J_A του πίνακα A.

β) Έστω πίνακας $A\in\mathbb{R}^{4\times 4}$ με $\sigma(A^tA)=\left\{\frac{9}{16},\frac{1}{4},\frac{1}{9},\frac{1}{16}\right\}$. Αν *ρ(A)* είναι η φασματική ακτίνα του πίνακα A, δείξτε ότι $\rho(A)\le\frac{3}{4}$.

<u>Να απαντήσετε σε 4 από τα 5 βαθμολογικώς ισοδύναμα θέματα</u>