ΣΕΠΤΕΜΒΡΙΟΣ 2002

Θέμα 1^o: α) Δίνεται ο πίνακας A=$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \in \Re^{2\times 2}$

ι) Να γίνει άνω τριγωνικός R με χρήση του πίνακα περιστροφής Q_θ

ιι) Να προσδιοριστεί η παραγοντοποίηση A=QR, όπου Q ορθογώνιος και R άνω τριγωνικός.

ιιι) Με την βοήθεια της παραγοντοποίησης αυτής, να λυθεί το σύστημα $A\overline{x} = \overline{b}, \overline{b} = [2,6]^t$

β) Έστω $A \in C^{n\times n}$ και F(A)={ $\overline{x}^* A\overline{x} : \overline{x} \in C^{n\times n} : \overline{x}^* \overline{x} = 1$ }. Εάν σ(A) είναι το φάσμα του A, δείξτε ότι σ(A)⊂F(A)

Θέμα 2^o: α) Έστω $A \in \Re^{n\times n}$, $P,Q \in \Re^{n\times n}$ ορθογώνιοι. Να αποδείξετε ότι:

ι) $\|A\|_2 = \|PAQ\|_2$ ιι) $\|A\|_2 = \|PAQ\|_2$, δηλαδή η ευκλείδεια νόρμα και η φασματική νόρμα είναι ορθογώνια αναλλοίωτες

β) Έστω $A \in \Re^{n\times n}$ και έστω $A=U\Sigma V^T$ η ανάλυση ιδιαζουσών τιμών του, όπου Σ=diag{σ_i} ,$\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \ldots \geq \sigma_n$. Να αποδείξετε ότι : ι) $\|A\|_2 = \sigma_1$, ιι) $\|A\|_2 = (\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \ldots + \sigma_n^2)^{1/2}$

ιιι) $\|A^{-1}\|_2 = \dfrac{1}{\sigma_n^2}$, ιν) $\kappa_2(A) = \|A\|_2 \|A^{-1}\|_2 = \dfrac{\sigma_1}{\sigma_n}$

γ) Έστω ο πίνακας A=$\begin{bmatrix} \alpha & b \\ c & d \end{bmatrix}$ μη ιδιάζων. Ορίζουμε την ποσότητα $\sigma = \dfrac{a^2 + b^2 + c^2 + d^2}{2|ad - bc|}$

ι). Εκφράστε την σ συναρτήσει της Ευκλείδειας νόρμας και της ορίζουσας του A

ιι) Με την βοήθεια της ανάλυσης ιδιαζουσών τιμών του A αποδείξτε ότι

$\kappa_2(A) = \|A\|_2 \|A^{-1}\|_2 = \sigma + \sqrt{\sigma^2 - 1}$

Θέμα 3^o: α) Έστω $P,Q \in C^{n\times n}$ πίνακες με διακεκριμένες ιδιοτιμές. Δείξτε ότι οι πίνακες P και Q έχουν τα ίδια ιδιοδιανύσματα, αν και μόνο αν αντιμετατίθενται.

β) Έστω $A,B \in \Re^{n\times n}$ τετραγωνικοί πίνακες με $A^t B=0$. Αν X και Y είναι ο χώρος στηλών των πινάκων A και B αντίστοιχα, να δείξετε ότι X ⊥ Y

Θέμα 4^o: α) Δίνεται η εξίσωση διαφορών $\overline{u}_{k+1} = A\overline{u_k}$, $A \in \Re^{3\times 3}$, $\kappa \in N$ και $\overline{u_o} \in \Re^n$ Δοσμένη αρχική συνθήκη. Αν ο πίνακας A έχει διακεκριμένες ιδιοτιμές να εκφραστεί η λύση $\overline{u_k}$ της εξίσωσης συναρτήσει των ιδιοτιμών και των ιδιοδιανυσμάτων του A . Να διατυπωθεί η ικανή και αναγκαία συνθήκη ώστε για την λύση $\overline{u_k}$ που θα βρείτε να ισχύει: $\lim_{k\to\infty} \overline{u_k} = 0$

β) Ένας πίνακας $A \in \Re^{6\times 6}$ έχει ιδιοτιμές λ_1=-2,λ_2=-3 με αντίστοιχες αλγεβρικές πολλαπλότητες τ_1=1, τ_2=5. Για την ιδιοτιμή λ_2 έστω ότι Γ_1=4, Γ_2=2, Γ_3=1, Γ_4=1 (Γ_i=rank$(A-\lambda_0 I_6)^2$, i=1,2,…)

ι) Με χρήση της χαρακτηριστικής Segre και του διαγράμματος Ferrer να βρεθεί η κανονική μορφή Jordan J_A του πίνακα A

ιι) Να γράψετε (χωρίς επεξηγήσεις) τον πίνακα $e^{J_A T}$ καθώς και το $\lim_{T\to\infty} e^{J_A T}$.