ΣΕΠΤΕΜΒΡΙΟΣ 2003

Θέμα 1ο: Έστω πίνακας $A \in \Re^{6\times6}$ με χαρακτηριστικό πολυώνυμο $\varphi(\lambda)=(\lambda+2)^3(\lambda+1)^3$
Αν rank$[A+2I_6]=4$ και rank$[A+I_6]=5$, τότε:

α) Να βρεθεί η κανονική μορφή Jordan J_A του πίνακα Α.

β) Να υπολογιστεί το ελάχιστο πολυώνυμο $m(\lambda)$του Α.

γ) Να αποδειχτεί ότι υπάρχει ο αντίστροφος του Α και ότι

$A^{-1}=-\frac{1}{4}(A^4+7A^3+19A^2+25A+16I_6)$.

δ) Να λυθεί το Π.Α.Τ $\bar{y}'(t)=J_A\cdot\bar{y}(t)$, $\overline{y(0)}=\bar{c}\in\Re^6$ και να βρεθεί το $\lim_{t\to+\infty}\bar{y}(t)$.

Θέμα 2ο: α) Αν $A=\begin{bmatrix}4 & -2 & 6\\ -2 & 2 & -4\\ 6 & -4 & 14\end{bmatrix}$, να δειχτεί με την μέθοδο Cholesky ότι ο Α είναι θετικά ορισμένος και να λυθεί με τον αλγόριθμο Cholesky το σύστημα $A\bar{x}=\bar{b}$, όπου $\bar{b}=[-8,6,-22]^t$

β) Έστω $A,B\in\Re^{n\times n}$ και $A^tB=\{O\}$. Αν $V_A^0 V_B^0$ είναι οι χώροι που παράγονται από τις στήλες των Α και Β αντίστοιχα, να δειχτεί ότι $V_A^0\perp V_B^0$

Θέμα 3ο: α) Ένα μη μηδενικό διάνυσμα $\overline{y\in}\ C^n$ ονομάζεται αριστερό ιδιοδιάνυσμα του πίνακα $A\in C^{n\times n}$ που αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή $\lambda\in C$ του Α, αν και μόνο αν $\bar{y}^*A=\lambda\bar{y}^*$. Να δείξετε ότι αν $\lambda,\mu\in\sigma(A)$ με $\lambda\neq\mu$, τότε κάθε αριστερό ιδιοδιάνυσμα του Α που αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή μ είναι ορθογώνιο σε κάθε δεξιό ιδιοδιάνυσμα του Α που αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή λ.

β) Αν $A\in C^{n\times n}$, Ερμιτιανός πίνακας, να δείξετε ότι

ι) $\bar{x}^*A\bar{x}\in\Re$, $\forall\bar{x}\in C^n$

ιι) κάθε ιδιοτιμή του Α είναι πραγματική,

ιιι) Τα δεξιά ιδιοδιανύσματα του Α συμπίπτουν με τα αριστερά ιδιοδιανύσματα του.

ιν) Δίνεται ο πίνακας $B=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\\ 1 & 1\end{bmatrix}$. Να υπολογιστούν οι παρακάτω επαγώμενες νόρμες

$\|B\|_1, \|B\|_\infty, \|B\|_2$

Θέμα 4ο: Έστω πίνακας $A\in\Re^{6\times6}$ με χαρακτηριστικό πολυώνυμο $\varphi(\lambda)=(\lambda-\lambda_1)^4(\lambda-\lambda_2)^2$ όπου $\lambda_1\lambda_2\in\Re$. Στην ιδιοτιμή λ_1 αντιστοιχούν δύο αλυσίδες ιδιοδιανυσμάτων $\{\bar{v}_1,\bar{v}_2,\bar{v}_3\}$και $\{\bar{w}_1\}$, όπου $\bar{v}_1,\bar{w}_1$ απλά ιδιοδιανύσματα, $\bar{v}_2$ γενικευμένο ιδιοδιάνυσμα β΄ τάξης και $\bar{v}_3$ γενικευμένο ιδιοδιάνυσμα τρίτης τάξης. Στην ιδιοτιμή λ_2 αντιστοιχεί μια αλυσίδα ιδιοδιανυσμάτων $\{\bar{q}_1,\bar{q}_2\}$,όπου $\bar{q}_1$ απλό ιδιοδιάνυσμα και $\bar{q}_2$ γενικευμένο ιδιοδιάνυσμα β΄ τάξης

α) Να γράψετε και να δικαιολογήσετε την κανονική μορφή Jordan J_A του Α.

β) Να προσδιορίσετε τον αντιστρέψιμο πίνακα $P\in\Re^{6\times6}$ με την ιδιότητα $P^{-1}AP=J_A$

γ) Αν $V^0=<\bar{v}_1,\bar{v}_2,\bar{v}_3>$ είναι ο χώρος που παράγουν τα $\bar{v}_1,\bar{v}_2,\bar{v}_3$, να δείξετε ότι ο V^0 είναι Α-αναλλοίωτος.