ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

ΛΟΓΙΣΜΟΣ ΠΙΝΑΚΩΝ ΚΑΙ ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

ΠΕΡΙΟΔΟΣ ΣΕΠΤΕΜΒΡΙΟΥ 2008 (9/9/2008)

Θ1. α) Δίνεται ο πίνακας $A=\begin{bmatrix}1 & a\\ 0 & t\end{bmatrix}$, $a\neq 0$, $|t|<1$. Δείξτε ότι: $\lim\limits_{m\to+\infty} A^m := A_\infty = \begin{bmatrix}1 & \dfrac{a}{1-t}\\ 0 & 0\end{bmatrix}$.

β) Να επιλυθεί με χρήση της ανάλυσης Cholesky το σύστημα: $\begin{bmatrix}2 & -1 & 0 & 0\\ -1 & 2 & -1 & 0\\ 0 & -1 & 2 & -1\\ 0 & 0 & -1 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\\ x_4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\ 0\\ 0\\ 1\end{bmatrix}$.

Θ2. **α)** Έστω $A\in\mathbb{R}^{n\times n}$ συμμετρικός πίνακας. Δείξτε ότι ο A είναι θετικά ορισμένος τότε και μόνον τότε αν ισχύει $\lambda_i>0$ για κάθε ιδιοτιμή λ_i του A.

β) Αν $A=\begin{bmatrix}3 & -2\\ -4 & 3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2 & 1\\ 0 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3 & 2\\ 4 & 3\end{bmatrix}$ είναι η ανάλυση του A στην κανονική μορφή Jordan, υπολογίστε τους πίνακες A^{10}, e^{At} στηριζόμενοι στην ανάλυση αυτή.

Θ3. **α)** Δίνεται ο πίνακας $A=\begin{bmatrix}3 & 2 & 1\\ 4 & 5 & 0\\ 6 & 1 & 5\end{bmatrix}$. Προσδιορίστε μη ιδιάζοντες πίνακες R, C έτσι ώστε ο πίνακας $R\cdot A$ να έχει άνω τριγωνική μορφή και ο πίνακας $A\cdot C$ να έχει κάτω τριγωνική μορφή. Στη συνέχεια να υπολογίσετε την ορίζουσα του A.

β) Η Ευκλείδια νόρμα πίνακα $A\in\mathbb{R}^{n\times n}$ που ορίζεται από τη σχέση $\|A\|_2 := \left(\sum\limits_{i,j=1}^{n}|a_{ij}|^2\right)^{1/2}$ αποτελεί επαγόμενη νόρμα επί του $\mathbb{R}^{n\times n}$;

Θ4. **α)** Έστω πίνακας $A\in\mathbb{R}^{2\times 3}$ με $\operatorname{rank}(A)=2$. Χρησιμοποιώντας υποθετικές ιδιάζουσες τιμές και τα αντίστοιχα αριστερά και δεξιά ιδιάζοντα διανύσματα να γίνει η ανάλυση ιδιαζουσών τιμών του.

β) Να γίνει η ανάλυση ιδιαζουσών τιμών για τον πίνακα $A=\begin{bmatrix}1 & 0 & -1\\ 1 & 1 & 1\end{bmatrix}\in\mathbb{R}^{2\times 3}$. Με τη βοήθεια αυτής της ανάλυσης υπολογίστε την $\||A|\|_2$.

Θ5. Έστω πίνακας $A\in\mathbb{R}^{6\times 6}$ με χαρακτηριστικό πολυώνυμο $\varphi(\lambda)=(\lambda-2)^2(\lambda+1)^4$. Αν $\operatorname{rank}[A-2I_6]=5$ και $\operatorname{rank}[A+I_6]=3$, τότε

α) να βρεθεί η κανονική μορφή Jordan J_A του πίνακα A,

β) να υπολογιστεί το ελάχιστο πολυώνυμο $m(\lambda)$ του A,

γ) Να αποδειχθεί ότι υπάρχει ο αντίστροφος του A και να υπολογιστεί συναρτήσει του A.

Να απαντήσετε σε 4 από τα 5 βαθμολογικώς ισοδύναμα θέματα