

ΘΕΜΑ 1:

(i) Εξετάστε εάν ο πίνακας $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}$ είναι θετικά ορισμένος

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

(ii) Η Ευκλείδεια νόρμα πινάκων $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ που ορίζεται από τη σχέση $\|A\|_2 := \left(\sum_{i,j=1}^n |a_{ij}|^2 \right)^{1/2}$ αποτελεί επαχόμενη νόρμα επί του $\mathbb{R}^{n \times n}$.

ΘΕΜΑ 2:

(i) Αποδείξτε ότι κάθε ιδιοτιμή ενός Ερμιτιανού πίνακα $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ είναι πραγματική.

(ii) Να εξετάσετε εάν διαγωνοποιούνται οι πίνακες

(15 μόν)

$$A = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \quad \text{και} \quad B = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Εάν ναί, προσδιορίστε πλήρως το μεσοσχηματισμό της διαγωνοποίησης αυτής.

ΘΕΜΑ 3:

(i) Να υπολογισθεί η ανάλυση ιδιοτιμών του $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$

(15 μόν) Με τη βοήθειά της προσδιορίστε τη φασματική νόρμα $\|A\|_2$.

(ii) Να προσδιορισθεί ο αριστερός πυρήνας του $B = \begin{bmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

ΘΕΜΑ 4:

(i) Έστω $A = \begin{bmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix}$. Να υπολογισθεί ο πίνακας e^{At}

(ii) Έστω πίνακας $A \in \mathbb{R}^{6 \times 6}$ με χαρακτηριστικό πολυώνυμο $\varphi(\lambda) = (\lambda-2)^3(\lambda-3)^3$. Αν $\text{rank}(A-2I_6) = 4$ και $\text{rank}(A-3I_6) = 5$ να βρεθεί η Jordan κανονική μορφή του A .