

Θ1. α) Έστω ο πίνακας $A = \begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/4 & 3/4 \end{bmatrix}$.

- i) Να διαγωνοποιηθεί ο πίνακας A .
 ii) Να βρεθεί ο πίνακας A^n και να υπολογισθεί το $\lim_{n \rightarrow +\infty} A^n$

β) Δίνεται ο πίνακας $A = \begin{bmatrix} 4 & -2 & 6 \\ -2 & 2 & 4 \\ 6 & -4 & 14 \end{bmatrix}$. Να δειχθεί με τη μέθοδο Cholesky ότι είναι θετικά

ορισμένος και να λυθεί με χρήση αυτής της μεθόδου το σύστημα $Ax = b$, $b = [-8 \ 6 \ -22]'$.

Θ2. α) Έστω ο πίνακας $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}$. Δείξτε ότι $A^{-1} = \frac{1}{2}A^2 - 2A + \frac{5}{2}I_3$.

β) Αν $A_1 \in R^{m \times m}$ είναι όμοιος με τον $A_2 \in R^{m \times m}$ και $B_1 \in R^{n \times n}$ είναι όμοιος με τον $B_2 \in R^{n \times n}$, δείξτε ότι οι πίνακες $D_1 = \begin{bmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & B_1 \end{bmatrix}$ και $D_2 = \begin{bmatrix} A_2 & 0 \\ 0 & B_2 \end{bmatrix}$ είναι επίσης όμοιοι.

Θ3. α) Έστω πίνακας $A \in R^{2 \times 3}$ με $\text{rank}(A) = 2$. Χρησιμοποιώντας υποθετικές ιδιάζουσες τιμές και τα αντίστοιχα αριστερά και δεξιά ιδιάζοντα διανύσματα να γίνει η ανάλυση ιδιάζουσών τιμών του.

β) Να γίνει η ανάλυση ιδιάζουσών τιμών για τον πίνακα $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \in R^{2 \times 3}$. Με τη βοήθεια αυτής της ανάλυσης υπολογίστε την $\|A\|_2$.

γ) Η Ευκλείδεια νόρμα πίνακα $A \in R^{n \times n}$ που ορίζεται από τη σχέση $\|A\|_2 := \left(\sum_{i,j=1}^n |a_{ij}|^2 \right)^{1/2}$ αποτελεί επαγόμενη νόρμα επί του $R^{n \times n}$;

Θ4. Έστω πίνακας $A \in R^{6 \times 6}$ με χαρακτηριστικό πολυώνυμο $\varphi(\lambda) = (\lambda - 2)^2(\lambda + 1)^4$. Αν $\text{rank}[A - 2I_6] = 5$ και $\text{rank}[A + I_6] = 3$, τότε

- α) να βρεθεί η κανονική μορφή Jordan J_A του πίνακα A ,
 β) να υπολογιστεί το ελάχιστο πολυώνυμο $m(\lambda)$ του A ,
 γ) Να αποδειχθεί ότι υπάρχει ο αντίστροφος του A και να υπολογιστεί συναρτήσει του A .

Να απαντήσετε σε 3 από τα 4 βαθμολογικώς ισοδύναμα θέματα