Εξετάσεις στή Μιγαδική Ανάλυση I

24/2/2012

Γράψτε 4 θέματα

Θέμα 1ο α) Έστω $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ τόπος καί $f:\Omega \to \mathbb{C}$ ολόμορφη συνάρτηση, ώστε $f'(z)=0$ γιά κάθε $z\in\Omega$. Αποδείξτε πλήρως ότι ή f είναι σταθερή.

β) Βρείτε όλες τίς ακέραιες συναρτήσεις g πού έχουν τήν ιδιότητα $g(\frac{1}{n})=g'(\frac{1}{n})$ γιά $n=1,2,\dots$.

Θέμα 2ο α) Έστω $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ ανοικτό σύνολο καί $f:\Omega\to\mathbb{C}$ ολόμορφη συνάρτηση. Αποδείξτε τά εξής.

(i) Η f είναι τοπικά παραστάσιμη με δυναμοσειρά στό Ω.

(ii) Αν $\alpha\in\Omega$ καί $r>0$ μέ $\overline{\Delta}(\alpha,r)\subseteq\Omega$, τότε $f^{(n)}(z)=\frac{n!}{2\pi i}\int_{C(\alpha,r)}\frac{f(\zeta)}{(\zeta-z)^{n+1}}d\zeta$ γιά $z\in\Delta(\alpha,r)$ καί $n=0,1,2,\dots$.

β) Έστω $g:\Delta(0,1)\to\Delta(0,1)$ ολόμορφη συνάρτηση. Αποδείξτε ότι $|g'(0)|\le 1$.

Θέμα 3ο α) Έστω $\Omega\subseteq\mathbb{C}$ ανοικτό καί κυρτό σύνολο, $p_1,\dots,p_k\in\Omega$ καί ολόμορφη συνάρτηση $f:\Omega\setminus\{p_1,\dots,p_k\}\to\mathbb{C}$ ώστε κάθε p_j $(j\le k)$ είναι πόλος της f. Έστω επίσης κλειστή καμπύλη γ μέ $\gamma^*\subseteq\Omega\setminus\{p_1,\dots,p_k\}$. Αποδείξτε ότι

$$\int_\gamma f(z)dz = 2\pi i\sum_{j=1}^{k}Res(f,p_j)\delta_\gamma(p_j).$$

β) Έστω ή συνάρτηση $g(z)=\frac{e^z-1}{z(e^z-1-i)}$. Υπολογίστε τήν ακτίνα σύγκλισης της δυναμοσειράς

$$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{g^{(n)}(\frac{\log 2}{2})}{n!}z^n.$$

Θέμα 4ο α) Έστω f ακεραία μή σταθερή συνάρτηση. Αποδείξτε ότι

$|f|[\mathbb{C}]=[0,+\infty)\setminus$ τό πολύ τό μονοσύνολο $\{0\}$.

β) Έστω $g:\Delta(0,0,1)\to\mathbb{C}$ ολόμορφη συνάρτηση, ώστε τό 0 είναι απλός πόλος της g καί $Res(g,0)=1$. Έστω επίσης γιά κάθε r μέ $0<r<1$, η καμπύλη $\gamma_r:[0,\pi]\to\Delta(0,0,1): \gamma_r(t)=re^{it}$. Υπολογίστε τό

$$\lim_{r\to 0}\int_{\gamma_r}g(z)dz.$$

Θέμα 5ο α) Έστω δυναμοσειρά $f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\alpha_n z^n$, $z\in\Delta(0,1)$ μέ $\alpha_0\ne 0$, καί $z_0\in\Delta(0,1)$ ρίζα της f. Γιά κάθε ρ μέ $|z_0|<\rho<1$ θέτουμε

$$M(\rho)=\sup\{|f(\zeta)|:|\zeta|=\rho\}.$$

Αποδείξτε ότι $|z_0|\ge\frac{\rho|\alpha_0|}{M(\rho)+|\alpha_0|}$.

β) Έστω g ακεραία συνάρτηση. Υποθέτουμε ότι γιά κάθε $x\in\mathbb{R}$ υπάρχει $n\in\mathbb{N}$, ώστε $g^{(n)}(x)=0$. Αποδείξτε ότι ή g είναι πολυώνυμο.