Απειροστικός Λογισμός Ι

Εξετάσεις 6 Μαρτίου 2003

1. Αν $A = \{x \in \mathbb{Q} : x^2 - 2 \leq 0\}$ και $B = \{(-1)^n 2 + \frac{1}{n} : n = 1, 2, \ldots\}$, να βρεθούν, αν υπάρχουν, τα supremum, maximum, infimum και minimum των A και B. **(1μ)**

2. Να εξετασθεί αν υπάρχουν και (αν υπάρχουν) να υπολογισθούν, τα όρια των ακολουθιών **(1.5μ)**

$$a_n = \frac{\sqrt[n]{n}}{n!}, \quad b_n = \frac{(-2)^n}{n}, \quad x_n = \sqrt[n]{2 + \cos n}, \quad y_n = \cos(n\pi).$$

3. Αποδείξτε πλήρως ότι κάθε φθίνουσα ακολουθία θετικών αριθμών συγκλίνει. **(1μ)**

4. **(α)** Έστω (a_n) μη φραγμένη ακολουθία πραγματικών αριθμών. Μπορεί η (a_n) να έχει φραγμένη υπακολουθία; Έχει οπωσδήποτε μια φραγμένη υπακολουθία;

(β) Έστω (a_n) γνησίως αύξουσα ακολουθία πραγματικών αριθμών. Είναι αλήθεια ότι $\lim_n a_n = +\infty$;

(γ) Υπάρχει συγκλίνουσα ακολουθία (a_n) που να έχει μια γνησίως αύξουσα και μία γνησίως φθίνουσα υπακολουθία; **(1μ)**

5. Έστω $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ συνάρτηση με $f(x) = \begin{cases} 1 - x\,, & x \in \mathbb{Q} \\ x\,, & x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$

Εξετάστε την f ως προς τη συνέχεια. **(1μ)**

6. Αν μια συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ είναι **ασυνεχής** στο σημείο 0, αποδείξτε ότι υπάρχει ακολουθία (x_n) πραγματικών αριθμών με $|x_n| < \frac{1}{n^2}$ για κάθε $n = 1, 2, \ldots$ ώστε η ακολουθία $(f(x_n))$ να μη συγκλίνει στο $f(0)$. **(1.5μ)**

7. Έστω $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση. Αποδείξτε πλήρως ότι υπάρχει $\xi \in [a,b]$ ώστε $f(x) \geq f(\xi)$ για κάθε $x \in [a,b]$. **(1μ)**

8. Έστω $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση. Αποδείξτε ότι αν υπάρχει ακολουθία (x_n) στο $[0,1]$ ώστε $f(x_n) \to 0$, τότε υπάρχει $x_o \in [a,b]$ με $f(x_o) = 0$. **(1.5μ)**

9. Έστω $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ φραγμένη συνάρτηση για την οποία το όριο $\lim_{x\to 0} g(x)$ δεν υπάρχει. Θέτουμε

$$f_1(x) = \begin{cases} xg(x)\,, & x \neq 0 \\ 0\,, & x = 0 \end{cases} \qquad f_2(x) = \begin{cases} x^2 g(x)\,, & x \neq 0 \\ 0\,, & x = 0 \end{cases}$$

Αποδείξτε ότι η f_1 είναι συνεχής στο 0 αλλά δεν υπάρχει η παράγωγος $f_1'(0)$ και ότι η f_2 παραγωγίζεται στο 0. **(1.5μ)**

10. Έστω $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ δύο φορές παραγωγίσιμη και $x_1, x_2, x_3 \in (a,b)$ με $x_1 < x_2 < x_3$ ώστε $f(x_1) = f(x_2) = f(x_3)$. Δείξτε ότι υπάρχει $\xi \in (a,b)$ με $f''(\xi) = 0$. **(1μ)**

Σημειώστε στην πρώτη σελίδα του γραπτού σας
(α) το τμήμα στο οποίο ανήκετε
(β) τους αριθμούς των θεμάτων που απαντήσατε (βάζοντας σε κύκλο τον αντίστοιχο αριθμό).
Μαζί με το γραπτό σας να παραδίδετε και τα θέματα.

Καλή επιτυχία!