

Απειροστικός Λογισμός Ι

Εξετάσεις 1 Σεπτεμβρίου 2003

1. (α) Αν $A \subseteq \mathbb{R}$ μη κενό, φραγμένο και $\sup A = \inf A$, τι συμπεραίνετε για το A ;
(β) Αν $B = \{x \in \mathbb{Q} : (x-1)(x+\sqrt{2}) > 0\}$, να βρεθούν, αν υπάρχουν, τα supremum, maximum, infimum και minimum του B . (1μ)
2. (ι) Πότε μια ακολουθία πραγματικών αριθμών (a_n) , τείνει στο $+\infty$; (να δοθεί ο ορισμός).
(ιι) Αν $x > 0$, δείξτε ότι $\lim_n \frac{x^n}{n!} = 0$.
(ιιι) Δείξτε ότι $\lim_n \sqrt[n]{n!} = +\infty$ (μπορείτε να χρησιμοποιήσετε τις (ι) και (ιι)). (1.5μ)
3. Έστω (a_n) ακολουθία πραγματικών αριθμών που δεν είναι άνω φραγμένη. Εξετάστε αν κάθε μια από τις επόμενες προτάσεις είναι αληθής (δίνοντας απόδειξη) ή αν δεν είναι αληθής (δίνοντας αντιπαράδειγμα):
(α) Η (a_n) τείνει στο $+\infty$.
(β) Η (a_n) έχει μια υπακολουθία που τείνει στο $+\infty$. (1μ)
4. Για κάθε μία από τις προτάσεις που ακολουθούν να δοθεί απόδειξη αν είναι αληθής ή αντιπαράδειγμα αν δεν είναι αληθής:
(ι) Κάθε φραγμένη ακολουθία πραγματικών αριθμών συγκλίνει.
(ιι) Κάθε ακολουθία που συγκλίνει σε πραγματικό αριθμό είναι φραγμένη.
(ιιι) Αν μια ακολουθία συγκλίνει τότε είναι μονότονη. (1.5μ)
5. Έστω $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ συνάρτηση με $f(x) = \begin{cases} x^3, & x \in \mathbb{Q} \\ x, & x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$
Εξετάστε σε κάθε σημείο του $[0, 1]$ αν η f είναι συνεχής. (1μ)
6. Αν $f : [0, 2] \rightarrow \mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση ώστε $f(x) = x^2$ για κάθε ρητό αριθμό x , βρείτε το $f(\sqrt{2})$. (1μ)
7. Αν $f : [0, 3] \rightarrow \mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση και $0 \leq x_n \leq 3$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$, να βρεθεί, αν υπάρχει, το $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(x_n)}{n}$. (1μ)
8. Έστω $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση με $f(a)f(b) < 0$. Αποδείξτε πλήρως ότι υπάρχει $\xi \in (a, b)$ ώστε $f(\xi) = 0$. (1μ)
9. Έστω $f : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση ώστε $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 0$ και $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1$.
Αποδείξτε ότι υπάρχει $x_0 > 0$ με $f(x_0) = \frac{1}{2}$. (1.5μ)
10. Έστω $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(x) = \begin{cases} x^3 \sin \frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$
Εξετάστε αν η f είναι συνεχής στο 0 και αν παραγωγίζεται στο 0. (1μ)
11. Έστω $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ δύο φορές παραγωγίσιμη με $f''(x) \neq 0$ για κάθε $x \in (a, b)$. Δείξτε ότι η f έχει το πολύ δύο ρίζες στο (a, b) . (1μ)

Να γραφούν το πολύ 10 θέματα.

Σημειώστε στην πρώτη σελίδα του γραπτού σας

(α) αν δώσατε ενδιαμέση εξέταση (πρόοδο) και το τμήμα στο οποίο ανήκετε

(β) τους αριθμούς των θεμάτων που απαντήσατε (βάζοντας σε κύκλο τον αντίστοιχο αριθμό στην πρώτη σελίδα του γραπτού σας).

Μαζί με το γραπτό σας να παραδίδετε και τα θέματα.

Καλή επιτυχία!