Διαφορικές εξισώσεις 11/2/2008

Θέμα 1. 1. *Να λυθεί το Π.Α.Τ.* $y' - y = -te^{-2t}y, y(0) = 1$

2. *Να λυθεί η δ.ε.* $(4x^3y + 2xy^2)dx + (3x^4 + 4x^2y)dy = 0$ *αν είναι γνωστό ότι δέχεται ολοκληρωτικό παράγοντα της μορφής* $\mu = \mu(y)$

Θέμα 2. 1. *Να λυθεί η δ.ε.* $y''' - 4y' = t + 3cost + e^{-2t}$

2. *Να βρεθούν τα σημεία ισορροπίας, να χαρακτηρισθούν ως προς την ευστάθεια και να σχεδιαστεί το διάγραμμα φάσης της δ.ε.* $y' = (y-2)sin(\pi y)$ *με* $0 \leq y \leq 4$.

Θέμα 3. 1. *Δίνεται το Π.Α.Τ.*

$$y'(t) = A,\ y(t),\ y(0) = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} \text{με } A = \begin{bmatrix} -1 & 6 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}.$$

Να βρεθούν τα α,β ώστε η λύση του Π.Α.Τ. να είναι φραγμένη στο $[0, \infty)$.

2. *Να λυθεί με τη μέθοδο του μετασχηματισμού Laplace το Π.Α.Τ.*

$$y'' + 3y' + 2y = 6e^t,\ y(0) = 2,\ y'(0) = -1.$$

Θέμα 4. *Δίνεται το Π.Α.Τ.*

$$y'(t) = Ay(t) + \beta(t),\ y(0) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \text{ όπου } A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \text{ και } \beta(t) = e^t \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

1. *Να υπολογισθεί ο πίνακας* e^{At}

2. *Να λυθεί το παραπάνω Π.Α.Τ. .*

Θέμα 5. *Να λυθεί με τη μέθοδο των δυναμοσειρών η δ.ε.* $(1+t^2)y'' + 2ty' - 2y = 0$ *(γύρω από το σημείο* $t_0 = 0$*).*

Να απαντήσετε σε 4 θέματα

ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

ΔΙΑΦΟΡΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ Ι (12/9/2005)

ΘΕΜΑ 1. Έστω η διαφορική εξίσωση

$$M(t,y) + N(t,y)\frac{dy}{dt} = 0.$$

Αν

$$\frac{1}{yN - tM}\left(\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial t}\right) = g(ty),$$

να βρεθεί ένας ολοκληρωτικός παράγοντας της μορφής $\mu = \mu(ty)$.

Εφαρμογή: Να λυθεί η διαφορική εξίσωση

$$(t^2y + y^2)dt - t^3dy = 0.$$

ΘΕΜΑ 2. (α) Έστω $\varphi(t)$, $t \geq 0$, η λύση του π.α.τ.

$$y'(t) = Ay(t),\ y(0) = b,$$

με

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 6 \\ 1 & -2 \end{bmatrix},\ b = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix}.$$

Για ποιες τιμές των b_1, b_2 η φ είναι φραγμένη για κάθε $t \geq 0$;

(β) Να σχεδιαστεί το διάγραμμα φάσης και να χαρακτηρισθούν ως προς το είδος της ευστάθειας τα σημεία ισορροπίας της διαφορικής εξίσωσης

$$\frac{dy}{dt} = (1-y)\cdot y.$$

ΘΕΜΑ 3. (α) Έστω φ_1, φ_2 δύο λύσεις της διαφορικής εξίσωσης

$$y'' + p(t)y' + q(t)y = 0,$$

όπου $p, q : I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ συνεχείς, και $W(\varphi_1, \varphi_2)(t) \equiv W(t)$ η αντίστοιχη ορίζουσα Wronski. Να αποδειχθεί ότι

$$W'(t) + p(t)W(t) = 0.$$

(β) Αν y_1, y_2 είναι λύσεις της διαφορικής εξίσωσης

$$t^2y'' - 2y' + (t+3)y = 0\ ,\ \ t > 0,$$

με ορίζουσα Wronski $W(y_1, y_2)(2) = 3$, να βρεθεί η τιμή $W(y_1, y_2)(4)$.

ΘΕΜΑ 4. Να λυθεί το σύστημα

$$y' = Ay,$$

με

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -2 & 3 \\ 0 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}.$$

ΘΕΜΑ 5. Να λυθεί με τη μέθοδο δυναμοσειρών η διαφορική εξίσωση

$$(1+t^2)y'' + 2ty' - 2y = 0,$$

γύρω από το σημείο $t_0 = 0$.

ΝΑ ΑΠΑΝΤΗΣΕΤΕ ΣΕ 4 ΑΠΟ ΤΑ 5 ΒΑΘΜΟΛΟΓΙΚΩΣ ΙΣΟΔΥΝΑΜΑ ΘΕΜΑΤΑ

ΟΝΟΜΑΤΕΠΩΝΥΜΟ:

Α.Μ.:

ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

ΔΙΑΦΟΡΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ Ι (19/1/2005)

ΘΕΜΑ 1. (α) Έστω η διαφορική εξίσωση

$$y' = 2 \cdot \frac{(1+2t)^2}{(1+y)^2}.$$

Αν $y = \varphi(t)$ είναι η λύση της διαφορικής εξίσωσης που ικανοποιεί την αρχική συνθήκη $\varphi(0) = -0.5$, δείξτε (χωρίς να λυθεί η εξίσωση) ότι $\varphi(t) < 2t$, για κάθε t.

(β) Να λυθεί η διαφορική εξίσωση

$$2tyy' = 3y^2 - t^2.$$

ΘΕΜΑ 2. Να λυθεί το Π.Α.Τ. $y'(t) = Ay(t)$, $y(0) = y_0$, όπου

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 0 & -4 \\ 2 & -1 & -4 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad y_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

ΘΕΜΑ 3. Να λυθεί με τη μέθοδο των δυναμοσειρών το Π.Α.Τ.

$$(1-t^2)y'' - 2ty' + 2y = 0 \ , \ \ y(0) = \alpha \ , \ y'(0) = \beta,$$

όπου $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

ΘΕΜΑ 4. (α) Να αποδειχθεί ότι η διαφορική εξίσωση

$$(\alpha t y^2 + \beta y)dt + (\beta t^2 y + \alpha t)dy = 0$$

είναι ακριβής μόνο αν $\alpha = \beta$. Αν $\alpha \neq \beta$ δείξτε ότι $t^m y^n$ είναι ένας ολοκληρωτικός παράγοντας με

$$m = -\frac{2\beta + \alpha}{\alpha + \beta} \ \ \text{και} \ \ n = -\frac{2\alpha + \beta}{\alpha + \beta}.$$

Στη συνέχεια να λυθεί η διαφορική εξίσωση για $\alpha = 2$, $\beta = -1$.

(β) Να λυθεί η διαφορική εξίσωση

$$y'' + 2y' = 4t + 3e^{-2t}.$$

ΘΕΜΑ 5. (α) Να βρεθούν τα σημεία ισορροπίας, να χαρακτηρισθούν ως προς την ευστάθεια και να σχεδιαστεί το διάγραμμα φάσης της διαφορικής εξίσωσης

$$y' = (y-2)\sin y, \quad y \in [-2\pi, 2\pi].$$

(β) Δίνεται το μη ομογενές Π.Α.Τ.

$$y'(t) = Ay(t) + b(t) \ , \ \ y(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \tag{1}$$

όπου

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \ , \ \ b(t) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} e^t.$$

(i) Να υπολογιστεί ένας θεμελιώδης πίνακας του ομογενούς συστήματος $y'(t) = Ay(t)$.

(ii) Να υπολογιστεί ο πίνακας e^{At}.

(iii) Να βρεθεί η λύση του μη ομογενούς Π.Α.Τ. (1).

ΝΑ ΑΠΑΝΤΗΣΕΤΕ ΣΕ 4 ΑΠΟ ΤΑ 5 ΒΑΘΜΟΛΟΓΙΚΩΣ ΙΣΟΔΥΝΑΜΑ ΘΕΜΑΤΑ

ΟΝΟΜΑΤΕΠΩΝΥΜΟ:
Α.Μ.:

ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

ΔΙΑΦΟΡΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ Ι (14/9/2004)

ΘΕΜΑ 1. (α) Θεωρούμε το πρόβλημα

$$\begin{cases} y'' + \lambda y = 0 \;, \quad \lambda \in \mathbb{R}, \\ y(0) = 0 \;, \; y(1) = 0. \end{cases}$$

Να εξεταστεί αν υπάρχουν τιμές του λ για τις οποίες το πρόβλημα έχει μη μηδενικές λύσεις, και αν υπάρχουν να βρεθούν οι λύσεις αυτές.

(β) Δίνεται το Π.Α.Τ.

$$\frac{dy}{dt} = f(t, y) \;, \quad y(0) = 1.$$

Έστω ότι η f ικανοποιεί τις υποθέσεις του θεωρήματος της μοναδικότητας της λύσης. Αν $y_1(t) = t + 2$ και $y_2(t) = -t^2$ για $t \in \mathbb{R}$ είναι λύσεις της διαφορικής εξίσωσης του Π.Α.Τ., τι συμπέρασμα προκύπτει για τη λύση $y(t)$ του Π.Α.Τ.;

ΘΕΜΑ 2. Να προσδιοριστούν όλα τα διανύσματα $y_0 \in \mathbb{R}^3$ για τα οποία η λύση του Π.Α.Τ.

$$y' = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & -1 \end{bmatrix} y \;, \; y(0) = y_0,$$

είναι περιοδική συνάρτηση.

ΘΕΜΑ 3. Να βρεθεί με τη μέθοδο των δυναμοσειρών η γενική λύση της διαφορικής εξίσωσης

$$y'' + ty' + y = 0,$$

γύρω από το σημείο $t_0 = 0$.

ΘΕΜΑ 4. Να λυθεί η διαφορική εξίσωση

$$(t^2 y^4 e^y - t^2 y^2 - 3t)\frac{dy}{dt} + 2ty^4 e^y + 2ty^3 + y = 0.$$

ΘΕΜΑ 5. (α) Να βρεθούν τα σημεία ισορροπίας, να χαρακτηρισθούν ως προς την ευστάθεια και να σχεδιαστεί το διάγραμμα φάσης της διαφορικής εξίσωσης

$$y' = \mu + y^2 \;, \quad \mu \in \mathbb{R}.$$

(β) Να λυθεί η διαφορική εξίσωση

$$y'' - y' = 3t + 4e^t.$$

ΝΑ ΑΠΑΝΤΗΣΕΤΕ ΣΕ 4 ΑΠΟ ΤΑ 5 ΒΑΘΜΟΛΟΓΙΚΩΣ ΙΣΟΔΥΝΑΜΑ ΘΕΜΑΤΑ

ΟΝΟΜΑΤΕΠΩΝΥΜΟ:
Α.Μ.:

ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

ΔΙΑΦΟΡΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ Ι (15/3/2004)

Θ 1. Να λυθεί με τη μέθοδο των δυναμοσειρών το Π.Α.Τ.

$$y'' + ty = 0 \ \ , \ \ y(0) = 1 \ , \ y'(0) = 1.$$

Θ 2. Να λυθεί το Π.Α.Τ. $\boldsymbol{y}'(t) = A\boldsymbol{y}(t)$, $\boldsymbol{y}(0) = \boldsymbol{y}_0$, όπου

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & -3 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \ \ , \ \ \boldsymbol{y}_0 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

Θ 3. (α) Έστω το Π.Α.Τ.

$$y' = \frac{(y^2-4)(\sin^2 y^3 + \cos y - 2)}{2} \ \ , \ \ y(0) = \frac{1}{2}.$$

Αν $y = \varphi(t)$ είναι η λύση του Π.Α.Τ., εξηγήστε (χωρίς να λυθεί η εξίσωση) γιατί ισχύει ότι $\varphi(t) < 2$, για κάθε t.

(β) Να δειχθεί ότι ο πίνακας

$$\Phi(t) = \begin{bmatrix} 2 & \ln t \\ 0 & \dfrac{1}{t} \end{bmatrix} \ \ , \ \ t > 0,$$

είναι θεμελιώδης πίνακας λύσεων του συστήματος

$$\boldsymbol{y}' = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -\dfrac{1}{t} \end{bmatrix} \boldsymbol{y}$$

και στη συνέχεια να υπολογιστεί η λύση που αντιστοιχεί στην αρχική συνθήκη $\boldsymbol{y}(1) = [-2, 1]^t$.

Θ 4. (α) Να προσδιοριστεί το α έτσι ώστε το ακόλουθο Π.Α.Τ. να έχει περιοδική λύση:

$$y' - \frac{1}{2}y = 2\sin t \ \ , \ \ y(0) = \alpha.$$

(β) Αν ψ_1 και ψ_2 είναι λύσεις της διαφορικής εξίσωσης

$$y'' + 2y' + 5y = f(t),$$

όπου f συνεχής, να δειχθεί ότι

$$\lim_{t\to+\infty} |\psi_1(t) - \psi_2(t)| = 0.$$

Θ 5. (α) Να βρεθούν τα σημεία ισορροπίας, να χαρακτηρισθούν ως προς την ευστάθεια και να σχεδιαστεί το διάγραμμα φάσης της διαφορικής εξίσωσης

$$y' = y(y^2 - \mu) \ , \ \ \mu > 0.$$

Ειδικότερα για $\mu = 1$ και $y(0) = \dfrac{1}{2}$ να βρεθούν τα $\lim\limits_{t\to-\infty} y(t)$, $\lim\limits_{t\to+\infty} y(t)$.

(β) Να λυθεί η διαφορική εξίσωση

$$(1-t)y'' + ty' - y = 2(t-1)^2 e^{-t} \ , \ \ 0 < t < 1.$$

(Δίνεται ότι η $y_1(t) = t$ είναι λύση της αντίστοιχης ομογενούς.)

ΝΑ ΑΠΑΝΤΗΣΕΤΕ ΣΕ 4 ΑΠΟ ΤΑ 5 ΒΑΘΜΟΛΟΓΙΚΩΣ ΙΣΟΔΥΝΑΜΑ ΘΕΜΑΤΑ

ΟΝΟΜΑΤΕΠΩΝΥΜΟ:
Α.Μ.:

Θ.1) Δίνεται η δ.ε. $y''-3y'+2y=6\cdot e^{4t}$.

i) Να μετασχηματισθεί σε διαφορικό σύστημα της μορφής: $\bar{x}'(t)=A\bar{x}(t)+\bar{b}(t)$

ii) Να βρεθεί ένας θεμελιώδης πίνακας λύσεων του ομογενούς συστήματος $\bar{x}'(t)=A\bar{x}(t)$ καθώς και ο πίνακας e^{At}.

iii) Να λυθεί το Π.Α.Τ. $\bar{x}'(t)=A\bar{x}(t)+\bar{b}(t)$, $\bar{x}(0)=\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}$.

iv) Να γίνει χαρακτηρισμός του τύπου των σημείων ισορροπίας του $\bar{x}'(t)=A\bar{x}(t)$.

Θ.2) i) Να λυθεί η δ.ε. $tx'-x-(\log t)x^2=0$, $t>0$

ii) Να βρεθούν τα σημεία ισορροπίας της δ.ε. $x''+4\eta\mu x=0$, $x=x(t)$ και το είδος της ευστάθειας στη θέση $\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}$.

Θ.3) i) Δίνεται η δ.ε. $M(t,y)dt+N(t,y)dy=0$ όπου $M(t,y)$, $N(t,y)$ είναι ορισμένες σε ένα τόπο $T\subseteq\mathbb{R}^2$, απλά συνεκτικό και έχουν συνεχείς πρώτες μερικές παραγώγους. Δείξτε ότι υπάρχει ολοκληρωτικός παράγοντας $\mu=\mu(t^2+y^2)$, τότε και μόνον τότε, αν: $\dfrac{\frac{\partial N}{\partial t}-\frac{\partial M}{\partial y}}{2(My-tN)}=\varphi(z)$, όπου $z=t^2+y^2$.

ii) Να λυθεί η δ.ε. $(t-y)dt+(t+y)dy=0$ με εφαρμογή της πρότασης i).

Θ.4) i) Θεωρούμε τη δ.ε. $x''+5x'+6x=f(t)$, $t\geq 0$, όπου $f(t)$ συνεχής πραγματική συνάρτηση με $|f(t)|\leq b$, $(b\geq 0)$ $\forall\, t\geq 0$. Αν $\varphi(t)$ είναι η (ειδική) λύση της δ.ε. που προκύπτει με τη μέθοδο μεταβολής των παραμέτρων του Lagrange, να δειχθεί ότι: $|\varphi(t)|\leq \frac{5}{6}b$.

ii) Να λυθεί το Π.Α.Τ. $y''-y'=3t+4e^t$, $y(0)=1$, $y'(0)=0$.

Θ.5) i) Δίνεται η δ.ε. $a_3x'''+a_2x''+a_1x'+a_0x=0$, $x=x(t)$, $a_i\in\mathbb{R}$, $i=0,1,2,3$ και $a_3\neq 0$. Αν $\bar{y}'(t)=A\bar{y}(t)$ το αντίστοιχο σύστημα που μετασχηματίζεται η διαφ. εξίσωση, να δειχθεί ότι: ο $\lambda\in\mathbb{C}$ είναι ιδιοτιμή του πίνακα A τότε και μόνον τότε αν ο λ είναι ρίζα του χαρακτηριστικού πολυωνύμου της διαφορ. εξίσωσης.

ii) Δίνεται το σύστημα: $\bar{x}'(t)=A\bar{x}(t)$, $A=\begin{bmatrix}-1 & -1\\ 2 & -4\end{bmatrix}$. Να δειχθεί (με χρήση του ορισμού) ότι το σημ. ισορροπίας $\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}$ είναι ασυμπτωτικά ευσταθές κατά Liapounov.

Θ.6) i) Δίνεται η δ.ε. $x'=t+x$, $x=x(t)$, $x(0)=1$ (1). Να υπολογισθεί η λύση της δ.ε. (1) με τη βοήθεια του θεωρήματος Picard–Lindelöf.

ii) Να σχεδιασθεί η τροχιά που αντιστοιχεί στη λύση του Π.Α.Τ.

$$\begin{cases} x'=-y, & x(0)=4 \\ y'=x, & y(0)=2 \end{cases}$$

$x=x(t)$, $y=y(t)$ καθώς και η διεύθυνση κατά την οποία διατρέχεται η τροχιά.

ΣΗΜΕΙΩΣΗ: Απαντήστε σε τέσσερα (4) θέματα.

Θ.7) i) Εύρετε τα διαγράμματα φάσεως και τα α και ω οριακά σύνολα όλων των τροχιών για τα δυναμικά συστήματα:

α) $x' = x - x^3 + 1$ β) $x' = -x - x^3 + \lambda$, $\lambda \in \mathbb{R}$ αυθαίρετο

ii) Εύρετε το διάγραμμα φάσεως επί της περιφέρειας για το περιοδικό σύστημα: $x' = 1 - \eta\mu x$.

iii) Δείξτε ότι η μηδενική λύση του συστήματος

$$x_1' = -x_1 - x_2 - (x_1^2 + x_2^2)$$

$$x_2' = x_1 - x_2 + (x_1^2 + x_2^2)$$

είναι γραμμικά ασυμπτωτικά ευσταθής. Σχεδιάστε το επίπεδο φάσεως του γραμμικοποιημένου συστήματος.

Σημείωση: Από τα (7) επτά θέματα θα απαντήσετε σε (4) τέσσερα. Όλα είναι βαθμολογικά ισοδύναμα.

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ!

ΔΙΑΦΟΡΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ 1 (27.2.98)

Θ1: α) Εστω η γραμ. δ.ε. $x''+\alpha(t)x'+\beta(t)x=0$ (Ε). Να βρεθεί κατάλληλη συνάρτηση $v(t)$ έτσι ώστε η αντικατάσταση $x(t)=v(t)u(t)$ να μετασχηματίζει την (Ε) σε δ.ε. χωρίς τον πρωτοτάξιο όρο.
Εφαρμογή: να λυθεί η δ.ε. $x''+2(t+1)x'+(t+1)^2x=0$.
β) Να λυθεί το δ.σ. $\vec{y}'=A\vec{y}+e^{2t}\vec{b}$, όπου $A=\begin{bmatrix}-4 & 1\\ 1 & -2\end{bmatrix}$, $\vec{b}=\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}$.

Θ2: α) Να διατυπωθεί το θεώρημα Peano στον $\mathbb{R}^2$.
β) Να μελετηθεί ως προς την ύπαρξη και το μονοσήμαντο λύσης το π.α.τ.: $x'=\sqrt{|x|}$, $x(\alpha)=0$, $\alpha\in\mathbb{R}$.

Θ3: α) Εστω $\lambda\in\mathbb{C}$, $\vec{u}\in\mathbb{C}^n$ και $A\in\mathbb{R}^{n\times n}$. Να αποδειχθεί ότι $e^{At}\vec{u}=e^{\lambda t}\left[I_n+(A-\lambda I_n)t+\frac{(A-\lambda I_n)^2}{2!}t^2+\dots\right]\vec{u}$. Ειδικότερα, αν λ είναι ιδιοτιμή του πίνακα A και $\vec{u}$ το αντίστοιχο γενικευμένο ιδιοδιάνυσμα k τάξης, να χρησιμοποιηθεί ο τύπος αυτός για την επίλυση του δ.σ. $\vec{y}'=A\vec{y}$.
β) Να λυθεί το δ.σ. $y_1'=y_2$, $y_2'=y_1+y_3$, $y_3'=-y_2$

Θ4: α) Να λυθεί η δ.ε. $(1-t)x''+tx'-x=-(t-1)^2$, $t>1$, αν μία λύση της αντίστοιχης ομογενούς είναι της μορφής $e^{\alpha t}$, $\alpha\in\mathbb{R}$.
β) Αν φ_1, φ_2 είναι δύο λύσεις της δ.ε. Riccati $x'+\alpha(t)x=\beta(t)x^2+\gamma(t)$, να αποδειχθεί ότι κάθε άλλη λύση της x δίνεται από τον τύπο $\frac{x(t)-\varphi_1(t)}{x(t)-\varphi_2(t)}=c\,e^{\varphi(t)}$, c σταθ., όπου $\varphi(t)=\int[\varphi_1(t)-\varphi_2(t)]\beta(t)dt$.
$y_1=x'$

Θ5: α) Εστω η δ.ε. $x'''+\alpha_1x''+\alpha_2x'+\alpha_3x=0$, $\alpha_j\in\mathbb{R}$, $j=1,2,3$, (Ε). Να μετασχηματισθεί σε δ.σ. $\vec{y}'=A\vec{y}$, $A\in\mathbb{R}^{3\times3}$, και να αποδειχθεί ότι λ είναι ιδιοτιμή του πίνακα A τότε και μόνο τότε αν λ είναι ρίζα της χαρακτηριστικής εξίσωσης της δ.ε. (Ε).
β) Με εφαρμογή του (α) να βρεθεί ένας θεμελιώδης πίνακας λύσεων του δ.σ. $\vec{y}'=A\vec{y}$, όπου $A=\begin{bmatrix}0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ -1 & 1 & 1\end{bmatrix}$

ΝΑ ΑΠΑΝΤΗΣΕΤΕ ΣΕ 4 ΘΕΜΑΤΑ

ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

ΔΙΑΦΟΡΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ Ι (10.2.97)

Θ$_1$: α) Να λυθεί η δ.ε. $x' + 2tx = 2t^3x^3$.

β) Θεωρούμε το π.α.τ. $\left(\vec{y}\,' = A(t)\cdot\vec{y} + \vec{F}(t),\ \vec{y}(t_0) = \vec{y}_0\right)$ (*), όπου $A: I \to \mathbb{R}^{n\times n}$ συνεχής (I διάστημα του $\mathbb{R}$), $\vec{F}: I \to \mathbb{R}^n$ συνεχής, $t_0 \in I$, $\vec{y}_0 \in \mathbb{R}^n$. Έστω $\vec{\varphi}(t)$, $t \in I$ λύση του π.α.τ. (*). Να αποδειχθεί ότι η $\vec{\varphi}$ είναι μοναδική.

Θ$_2$: α) Να αποδειχθεί ότι η δ.ε. $x' + \alpha x + \beta x^2 = g(t)$, όπου α, β: σταθ. $g: I \to \mathbb{R}$ συνεχής (I διάστημα του $\mathbb{R}$), μετασχηματίζεται στη δ.ε. $u'' + \alpha u' - \beta g(t) u = 0$, όπου $x = \frac{u'}{\beta u}$. Μέσω αυτής της διαδικασίας να λυθεί το π.α.τ. $3x' + 9x^2 = 4$, $x(0) = 0$.

β) Να λυθεί το δ.σ. $y_1' = y_1 + y_2$, $y_2' = -y_1 + 3y_2$.

Θ$_3$: α) Να λυθεί η δ.ε. $2tx'' + (1-4t)x' + (2t-1)x = e^t$, $t > 0$, αν δύο λύσεις της είναι $x_1(t) = te^t$, $x_2(t) = (1+t)e^t$, $t > 0$.

β) Θεωρούμε το π.α.τ. $\left(\vec{y}\,' = A(t)\cdot\vec{y},\ \vec{y}(t_0) = \vec{y}_0\right)$ (*), όπου $A: I \to \mathbb{R}^{n\times n}$ συνεχής, I τυχόν διάστημα του $\mathbb{R}$, $t_0 \in I$, $\vec{y}_0 \in \mathbb{R}^n$. Έστω $\Phi(t)$, $t \in I$ ένας θεμελιώδης πίνακας λύσεων του δ.σ. $\vec{y}\,' = A(t)\cdot\vec{y}$. Ορίζουμε $E(t, t_0) := \Phi(t)\cdot\Phi^{-1}(t_0)$, $t \in I$. Να αποδειχθεί ότι:

(i) $E(t, t_0)$ είναι ανεξάρτητη της επιλογής του $\Phi(t)$.

(ii) $E(t_1, t_2)\cdot E(t_2, t_3) = E(t_1, t_3)$ για κάθε $t_1, t_2, t_3 \in I$.

(iii) Η λύση του π.α.τ. (*) είναι $\vec{y}(t) = E(t, t_0)\cdot\vec{y}_0$.

Θ$_4$: α) Να λυθεί το δ.σ. $\vec{y}\,' = A(t)\cdot\vec{y}$, όπου $A(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & e^{-t} \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

β) Θεωρούμε τη δ.ε. $x'' - 5t^{-1}x' + f(t)x = 0$ (*), $t > 0$ με $f: (0, \infty) \to \mathbb{R}$ συνεχή. Αν $\varphi(t)$, $t^2\varphi(t)$, $t > 0$ είναι λύσεις της δ.ε. (*), να βρεθούν οι συναρτήσεις φ και f.

Θ$_5$: α) Να λυθεί η δ.ε. $x'' - x' - 2x = 2e^t - 3e^{-t}$.

β) Να λυθεί το δ.σ. $\vec{y}\,' = A\cdot\vec{y}$, όπου $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$.

ΝΑ ΑΠΑΝΤΗΣΕΤΕ ΣΕ 4 ΘΕΜΑΤΑ