ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΛΟΓΙΚΗ (513)
ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΤΟ ΣΠΙΤΙ 2
19-12-2002.

Άσκηση 1. Αποδείξτε ότι το $\{\vee, +, \leftrightarrow\}$ είναι πλήρες σύνολο συνδέσμων.
(1 μον.)

Άσκηση 2. Αποδείξτε ότι το $\{\neg, \leftrightarrow\}$ δεν είναι πλήρες σύνολο συνδέσμων.
(1 μον.)

Άσκηση 3. Δείξτε, χωρίς χρήση του Θεωρήματος Πληρότητας, ότι για οποιουσδήποτε προτασιακούς τύπους φ, ψ:

$$\vdash (\varphi \to \neg\psi) \to (\psi \to \neg\varphi).$$

(1 μον.)

Άσκηση 4. Δείξτε, χωρίς χρήση των Θεωρημάτων Πληρότητας και Απαγωγής, ότι για κάθε προτασιακό τύπο φ:

$$\vdash \varphi \to \neg\neg\varphi.$$

(Επιτρέπεται να χρησιμοποιήσετε, εκτός από αξιώματα και εφαρμογές του κανόνα *M.P.*, μόνο το γεγονός ότι $\vdash \neg\neg\varphi \to \varphi$ και $\vdash \varphi \to \varphi$.)
(2 μον.)

Άσκηση 5. Για τυχόν σύνολο προτασιακών τύπων Γ, λέμε ότι το Γ είναι 'τυπικά πλήρες' ανν για κάθε προτασιακό τύπο φ ισχύει $\Gamma \vdash \varphi$ ή $\Gamma \vdash \neg\varphi$. Δείξτε ότι, για κάθε συνεπές Γ, τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:

α) το Γ είναι τυπικά πλήρες

β) για οποιουσδήποτε προτασιακούς τύπους φ, ψ:

$$\Gamma \vdash \varphi \vee \psi \text{ ανν } \Gamma \vdash \varphi \text{ ή } \Gamma \vdash \psi.$$

(2 μον.)

Άσκηση 6. Έστω T σύνολο προτασιακών τύπων και φ προτασιακός τύπος. Λέμε ότι 'ο φ είναι ανεξάρτητος από το T' ανν $T \nvdash \varphi$ και $T \nvdash \neg\varphi$. Δείξτε ότι ο $p_1 \to p_2$ είναι ανεξάρτητος από το σύνολο $\{p_1 \leftrightarrow p_0 \wedge \neg p_2, p_2 \to p_0\}$.
(1,5 μον.)

Άσκηση 7. Έστω $\mathcal{A}_0^*$ το αξιωματικό σύστημα (του Lukasiewicz) που παίρνουμε από το $\mathcal{A}_0$ αντικαθιστώντας τα ΑΣ1–3 με τα εξής σχήματα:

$$\begin{array}{ll} \text{ΑΣ1}^* & (\neg\varphi \to \varphi) \to \varphi \\ \text{ΑΣ2}^* & \varphi \to (\neg\varphi \to \psi) \\ \text{ΑΣ3}^* & (\varphi \to \psi) \to ((\psi \to \chi) \to (\varphi \to \chi)). \end{array}$$

Δείξτε ότι για οποιουσδήποτε προτασιακούς τύπους φ, ψ, χ:

α) αν $\vdash_{\mathcal{A}_0^*} \varphi \to \psi$ και $\vdash_{\mathcal{A}_0^*} \psi \to \chi$, τότε $\vdash_{\mathcal{A}_0^*} \varphi \to \chi$.

β) $\vdash_{\mathcal{A}_0^*} \varphi \to \varphi$.

γ) αν $\vdash_{\mathcal{A}_0^*} \neg\psi \to \neg\varphi$, τότε $\vdash_{\mathcal{A}_0^*} \varphi \to \psi$.

(1,5 μον.)

Άσκηση 8. Έστω $\varphi_1, \varphi_2, \ldots$ ακολουθία προτασιακών τύπων τέτοια που για κάθε αποτίμηση a υπάρχει n με $\overline{a}(\varphi_n) = A$. Δείξτε ότι υπάρχει m τέτοιο που $\vdash \varphi_1 \vee \ldots \vee \varphi_m$.

(2 μον.)

Σημείωση. Οι λύσεις των ασκήσεων πρέπει να παραδοθούν μέχρι τις 1 μ.μ. στις 7-1-2003.