

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΛΟΓΙΚΗ (513)  
ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΤΟ ΣΠΙΤΙ 3  
21-1-2003.

**Άσκηση 1.** α) Ποιος είναι ο τύπος που μετά από απαλοιφή παρενθέσεων γράφεται ως  $\neg P(x_1) \wedge \exists x_2 Q(x_2, x_2) \leftrightarrow \forall x_2 P(x_2) \vee R(x_1)$ ;  
β) Πώς θα γραφεί ο τύπος  $[\exists x_3 (P(c_2) \rightarrow Q(x_3, c_1)) \vee (\neg \exists x_2 R(x_2))]$  αν απαλείψουμε όσα ζεύγη παρενθέσεων είναι δυνατά;  
(1 μον.)

**Άσκηση 2.** Ποιες μεταβλητές έμφανίζονται ελεύθερες και ποιες είναι δεσμευμένες στους ακόλουθους τύπους;  
 $\exists x_3 (\forall x_1 P(x_1, x_2) \rightarrow P(x_3, c)), \forall x_2 [\exists x_1 P(c_1, f(x_1, x_2)) \vee Q(g(x_1))]$ .  
(1 μον.)

**Άσκηση 3.** Έστω  $v$  αποτίμηση στη δομή  $\mathcal{N}^*$  για τη  $\Gamma_1^{\theta\alpha}$  (σελίδα 44 σημειώσεων) τέτοια που  $v(x_1) = -2$ ,  $v(x_2) = 0$  και  $v(x_3) = -1$ . Βρείτε (αναλυτικά)  
α) την τιμή του όρου  $x'_1 \odot (x_1 \oplus x''_3)$   
β) την τιμή αλήθειας του τύπου  $\forall x_4 (x_4 \odot x_3 \approx x_4) \leftrightarrow (x_1 \oplus x_2 \approx x_1)$ .  
(1,5 μον.)

**Άσκηση 4.** Έστω  $\Gamma_1^\alpha$  η πρωτοβάθμια γλώσσα με ένα μονομελές κατηγορηματικό σύμβολο  $P$  και ένα μονοθέσιο συναρτησιακό σύμβολο  $f$ . Βρείτε δομή  $\mathcal{A}$  για τη  $\Gamma_1^\alpha$  και αποτίμηση  $v$  στην  $\mathcal{A}$  που δεν ικανοποιούν τον τύπο  $\forall x_1 [P(x_1) \rightarrow P(f(x_1))]$ .  
(1 μον.)

**Άσκηση 5.** Θεωρούμε τις δομές  $\mathcal{A}, \mathcal{B}$  για τη  $\Gamma_1^\delta$  (δες Άσκηση 39 σημειώσεων), που ορίζονται ως εξής:  $\mathcal{A} = \langle \mathbf{N}, < \rangle$ ,  $\mathcal{B} = \langle \mathbf{N}, \Delta \rangle$ , όπου  
 $n \Delta m$  ανν  $(n < m$  και οι  $n, m$  είναι και οι δύο περιττοί ή άρτιοι)  
ή  $(o$   $n$  είναι άρτιος και  $o$   $m$  είναι περιττός).  
Βρείτε πρόταση  $\sigma$  της  $\Gamma_1^\delta$  που αληθεύει στην  $\mathcal{A}$  αλλά όχι στη  $\mathcal{B}$ .  
(1,5 μον.)

**Άσκηση 6.** Δείξτε ότι για οποιουσδήποτε τύπους  $\varphi, \psi$ :  
 $\models (\exists x \varphi \rightarrow \forall x \psi) \rightarrow \forall x (\varphi \rightarrow \psi)$ .  
(1,5 μον.)

**Άσκηση 7.** Βρείτε κανονική ποσοδεικτική μορφή του τύπου  
 $\exists x \varphi(x) \vee \forall y \psi(x, y) \rightarrow \exists x \forall y \theta(x, y)$ ,  
όπου ο συμβολισμός  $\varphi(x)$  υποδεικνύει ότι (μόνο) η μεταβλητή  $x$  εμφανίζεται ελεύθερη στον τύπο  $\varphi$  (αντίστοιχα για τις  $\psi, \theta$ ).  
(1,5 μον.)

**Άσκηση 8.** Δείξτε ότι για κάθε όρο  $t$ , δομή  $\mathcal{A}$ , αποτίμηση  $v$  στην  $\mathcal{A}$ , μεταβλητές  $x, y$  και  $a \in |\mathcal{A}|$ , αν η  $y$  δεν εμφανίζεται στον  $t$ , τότε

$$\overline{v(x|a)}(t) = \overline{v(y|a)}(t_y^x).$$

(Με  $t_y^x$  συμβολίζουμε τον όρο που προκύπτει αν αντικαταστήσουμε τη μεταβλητή  $x$  με την  $y$ , παντού στον  $t$ .)

(1 μον.)

**Σημείωση.** Οι λύσεις των ασκήσεων πρέπει να παραδοθούν μέχρι τις 3 μ.μ. της Τρίτης, 4-2-2003.