

Α1. ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΛΟΓΙΚΗ
ΤΕΛΙΚΗ ΕΞΕΤΑΣΗ
11-2-2003.

Θέμα 1. Έστω T άπειρο σύνολο προτασιακών τύπων και φ προτασιακός τύπος τέτοια που $T \models \varphi$. Δείξτε, χωρίς χρήση των θεωρημάτων εγκυρότητας και πληρότητας, ότι υπάρχει πεπερασμένο σύνολο $\Sigma \subseteq T$ τέτοιο που $\Sigma \models \varphi$.
(1 μον.)

Θέμα 2. Δείξτε ότι $\models \exists x[P(x, x) \rightarrow \forall yP(y, y)]$, όπου P είναι διμελές κατηγορηματικό σύμβολο.
(1 μον.)

Θέμα 3. Εξηγήστε αναλυτικά πώς χρησιμοποιείται η συντακτική μορφή του Θεωρήματος Αλφαβητικών Παραλλαγών στην απόδειξη του Θεωρήματος Πληρότητας (του Κατηγορηματικού Λογισμού).
(1,5 μον.)

Θέμα 4. Έστω ότι T, Σ είναι σύνολα τύπων που δεν έχουν κοινό μοντέλο. Δείξτε ότι υπάρχει πρόταση φ τέτοια που $T \models \varphi$ και $\Sigma \models \neg\varphi$.
(1,5 μον.)

Θέμα 5. Έστω ότι \mathcal{A}, \mathcal{B} είναι δομές για την πρωτοβάθμια γλώσσα Γ_1 τέτοιες που $\mathcal{A} \equiv \mathcal{B}$ και όλα τα στοιχεία των $|\mathcal{A}|, |\mathcal{B}|$ είναι ερμηνείες συμβόλων σταθερών. Δείξτε ότι η συνάρτηση $f : |\mathcal{A}| \rightarrow |\mathcal{B}|$ με $f(c^{\mathcal{A}}) = c^{\mathcal{B}}$ είναι ισομορφισμός της \mathcal{A} επί της \mathcal{B} .
(1 μον.)

Θέμα 6. Έστω $f : \mathbf{N}^k \rightarrow \mathbf{N}$, $k \geq 1$. Ορίστε την έννοια “η f είναι αναπαραστάσιμη στο P ” με δύο τρόπους και δείξτε ότι οι ορισμοί αυτοί είναι ισοδύναμοι.
(1,5 μον.)

Θέμα 7. Δείξτε ότι η σχέση $LNP(x)$ που αντιστοιχεί στην έκφραση “ο x είναι αριθμός Gödel τύπου που προκύπτει από την αρχή ελαχίστου αριθμού” είναι πρωτογενής αναδρομική.
(1,5 μον.)

Θέμα 8. Έστω ότι το P είναι συνεπές και έστω τ_{GR} η αναποκρίσιμη πρόταση του Θεωρήματος Gödel-Rosser. Δικαιολογήστε αναλυτικά γιατί υπάρχει πρόταση σ της $\Gamma_1^{\theta\alpha}$ τέτοια που

$$P + \tau_{GR} \not\models \sigma \text{ και } P + \tau_{GR} \not\models \neg\sigma.$$

(1 μον.)

Σημείωση. Για να περάσετε, πρέπει να συγκεντρώσετε τουλάχιστον 3 μονάδες από τα θέματα 3-5, 7-8.