

513 ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΛΟΓΙΚΗ
ΤΕΛΙΚΗ ΕΞΕΤΑΣΗ
15-6-2004.

Θέμα 1. Χρησιμοποιώντας νόμους της προτασιακής λογικής, απλοποιείστε τον προτασιακό τύπο $[p_1 \wedge ((p_1 \wedge p_2) \vee (p_1 \wedge \neg p_2))] \vee \neg(p_3 \vee \neg p_1)$.
(1 μον.)

Θέμα 2. Εξετάστε αν το $\{\neg, <\}$ είναι πλήρες σύνολο συνδέσμων, όπου $<$ είναι ο σύνδεσμος που αντιστοιχεί στον εξής πίνακα αλήθειας:

$\bar{a}(\varphi)$	$\bar{a}(\psi)$	$\bar{a}(\varphi < \psi)$
A	A	Ψ
A	Ψ	Ψ
Ψ	A	A
Ψ	Ψ	Ψ

(1 μον.)

Θέμα 3. Έστω $\Gamma_1^{\alpha\delta}$ η πρωτοβάθμια γλώσσα με μη λογικά σύμβολα τα P (διμελές κατηγορηματικό), f (διθέσιο συναρτησιακό) και c (σύμβολο σταθεράς). Θεωρούμε τη δομή \mathcal{A} για τη $\Gamma_1^{\alpha\delta}$ που ορίζεται ως εξής:

$$\begin{aligned} |\mathcal{A}| &= \mathbf{Z} \\ < m, n > \in P^{\mathcal{A}} \text{ ανν } m <^{\mathbf{Z}} n \\ f^{\mathcal{A}}(m, n) &= m -^{\mathbf{Z}} n \\ c^{\mathcal{A}} &= 0 \in \mathbf{Z}. \end{aligned}$$

Για καθεμιά από τις ακόλουθες προτάσεις της $\Gamma_1^{\alpha\delta}$, εξετάστε αν αληθεύει στην \mathcal{A} ή όχι: $\forall x P(f(c, x), c)$, $\forall x \forall y \neg P(f(x, y), x)$, $\forall x \exists y P(x, f(f(x, y), y))$.
(1,5 μον.)

Θέμα 4. Βρείτε τύπο σε κανονική ποσοδεικτική μορφή που είναι λογικά ισόδύναμος με τον τύπο

$$\forall y(Q(y) \rightarrow P(y)) \rightarrow (\exists y Q(y) \rightarrow \exists x P(x)),$$

όπου P, Q είναι μονομελή κατηγορηματικά σύμβολα.

(1,5 μον.)

Θέμα 5. Έστω τύπος φ στον οποίο εμφανίζεται ελεύθερη η μεταβλητή y , ενώ δεν εμφανίζεται καθόλου η μεταβλητή x . Χρησιμοποιώντας τυπικές αποδείξεις, δείξτε ότι

$$\vdash_{\mathcal{A}_1} \exists x \varphi_x^y \leftrightarrow \exists y \varphi.$$

(1,5 μον.)

Θέμα 6. Έστω T συνεπές σύνολο τύπων μιας αριθμήσιμης πρωτοβάθμιας γλώσσας Γ_1 . Δείξτε αναλυτικά ότι υπάρχει συνεπές σύνολο τύπων $\Sigma \supseteq T$ μιας επεκτεταμένης γλώσσας Γ_1^* τέτοιο που για κάθε τύπο φ (της Γ_1^*) και μεταβλητή y ο τύπος $\exists y\varphi \rightarrow \varphi_c^y$ ανήκει στο Σ , για κατάλληλο σύμβολο σταθεράς c (της Γ_1^*).
(2 μον.)

Θέμα 7. Θεωρούμε τις δομές $\mathcal{N}_\sigma, \mathcal{N}_\sigma^*$ για τη $\Gamma_1^{\theta\sigma}$ που ορίζονται ως εξής:

$$|\mathcal{N}_\sigma| = \mathbf{N}, \in^{\mathcal{N}_\sigma} = \{ \langle m, n \rangle \in \mathbf{N} \times \mathbf{N} : m < n \}$$

$$|\mathcal{N}_\sigma^*| = \mathbf{N}, \in^{\mathcal{N}_\sigma^*} = \{ \langle m, n \rangle \in \mathbf{N} \times \mathbf{N} : n < m \}.$$

Ισχύει $\mathcal{N}_\sigma \equiv \mathcal{N}_\sigma^*$; Ισχύει $\mathcal{N}_\sigma \cong \mathcal{N}_\sigma^*$; Εξηγήστε αναλυτικά.

(1,5 μον.)