

513 ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΛΟΓΙΚΗ
ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΗ ΕΞΕΤΑΣΗ
4-9-2003.

Θέμα 1. Δείξτε ότι για οποιεσδήποτε προτασιακές μεταβλητές p, q, r ισχύει

$$\{p, p|(q|r)\} \models r,$$

όπου $|$ είναι ο σύνδεσμος που αντιστοιχεί στην έκφραση “δεν ... ή δεν ...”
(1 μον.)

Θέμα 2. Εξετάστε αν το $\{\rightarrow, \leftrightarrow\}$ είναι πλήρες σύνολο συνδέσμων.

(1,5 μον.)

Θέμα 3. Έστω $\varphi_1, \varphi_2, \dots$ ακολουθία προτασιακών τύπων τέτοια που για κάθε αποτίμηση a υπάρχει n με $\bar{a}(\varphi_n) = A$. Δείξτε ότι υπάρχει m τέτοιο που $\vdash \varphi_1 \vee \dots \vee \varphi_m$.

(1,5 μον.)

Θέμα 4. Έστω Q διμελές κατηγορηματικό σύμβολο, c σύμβολο σταθεράς και \mathcal{A} τυχούσα δομή (για την κατάλληλη γλώσσα). Υπάρχει αποτίμηση v στην \mathcal{A} για την οποία ισχύει

$$\mathcal{A} \models \exists x_1 Q(x_1, x_2)[v] \text{ ανν } \mathcal{A} \models \exists x_3 Q(x_3, c)[v] ;$$

Εξηγήστε γιατί.

(1 μον.)

Θέμα 5. Χρησιμοποιώντας τυπικές αποδείξεις, δείξτε ότι

$$\vdash \exists x(P(x) \rightarrow Q(x)) \rightarrow (\forall x P(x) \rightarrow \exists x Q(x)),$$

όπου P, Q είναι μονομελή κατηγορηματικά σύμβολα.

(1,5 μον.)

Θέμα 6. Διατυπώστε το Θεώρημα Γενίκευσης Σταθερών και χρησιμοποιήστε το για να αποδείξετε το εξής θεώρημα: Για κάθε σύνολο τύπων T , τύπο φ , μεταβλητή y και σύμβολο σταθεράς c , αν $T \vdash \varphi_c^y$ και το c δεν εμφανίζεται σε κανένα στοιχείο του $T \cup \{\varphi\}$, τότε $T \vdash \forall y \varphi$.

(1,5 μον.)

Θέμα 7. Έστω T συνεπές σύνολο τύπων της Γ_1 και \mathcal{A} η δομή για τη Γ_1^{*E} που ορίσαμε στο δεύτερο βήμα της απόδειξης του θεωρήματος πληρότητας του κατηγορηματικού λογισμού. Δείξτε ότι

- 1) η $E^{\mathcal{A}}$ είναι σχέση ισοδυναμίας στο $|\mathcal{A}|$
- 2) η $f^{\mathcal{A}}$ είναι συμβιβαστή με την $E^{\mathcal{A}}$, για κάθε n -θέσιο συναρτησιακό σύμβολο f
- 3) η $P^{\mathcal{A}}$ είναι συμβιβαστή με την $E^{\mathcal{A}}$, για κάθε n -μελές κατηγορηματικό σύμβολο P .

(2 μον.)

Σημείωση. Για να περάσετε, πρέπει να συγκεντρώσετε τουλάχιστον 3 μονάδες από τα θέματα 4-7.