Λ1. ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΛΟΓΙΚΗ
ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΗ ΕΞΕΤΑΣΗ
22–9–2003.

Θέμα 1. Δείξτε αναλυτικά ότι κάθε αξίωμα που προκύπτει από το αξιωματικό σχήμα

$$\forall x\varphi \to \varphi^x_t, \ \ x \text{ αντικαταστάσιμη από τον } t \text{ στο } \varphi$$

είναι λογικά αληθής τύπος.

(1,5 μον.)

Θέμα 2. Δώστε μια **πλήρη** τυπική απόδειξη που δείχνει ότι

$$\vdash_{\mathcal{A}_1} \forall x\varphi \to \exists x\varphi.$$

(1,5 μον.)

Θέμα 3. Έστω $\mathcal{L}$ (αριθμήσιμη) πρωτοβάθμια γλώσσα και Σ σύνολο τύπων της $\mathcal{L}$ τέτοιο που

α) το Σ είναι συνεπές και πλήρες

β) για κάθε τύπο φ της $\mathcal{L}$ και κάθε μεταβλητή x υπάρχει σύμβολο σταθεράς c της $\mathcal{L}$ τέτοιο που $\exists x\varphi \to \varphi^x_t \in \Sigma$.

Έστω επίσης ότι έχουμε δομή $\mathcal{A}^E$ για τη γλώσσα $\mathcal{L}(E) = \mathcal{L} - \{=\} + \{E\}$ και αποτίμηση $\hat{v}$ στην $\mathcal{A}^E$ τέτοια που για κάθε τύπο φ της $\mathcal{L}$ ισχύει

$$\mathcal{A}^E \models \varphi^{=}_{E}[\hat{v}] \ \text{ ανν } \ \varphi \in \Sigma.$$

(όπου $\varphi^{=}_{E}$ είναι ο τύπος που προκύπτει από το φ αν αντικαταστήσουμε το σύμβολο $=$ με το E).
Δείξτε ότι υπάρχει δομή $\mathcal{A}$ για την $\mathcal{L}$ και αποτίμηση v στην $\mathcal{A}$ τέτοια που για κάθε τύπο φ της $\mathcal{L}$ ισχύει

$$\mathcal{A} \models \varphi[v] \ \text{ ανν } \ \varphi \in \Sigma.$$

(1,5 μον.)

Θέμα 4. Έστω ότι $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ είναι τυχούσες δομές για μια πρωτοβάθμια γλώσσα.
α) Αποδείξτε αναλυτικά ότι αν $\mathcal{A} \cong \mathcal{B}$, τότε $\mathcal{A} \equiv \mathcal{B}$. (1 μον.)
β) Δώστε παράδειγμα (με εξήγηση) που δείχνει ότι μπορεί να ισχύει $\mathcal{A} \equiv \mathcal{B}$, αλλά $\mathcal{A} \not\cong \mathcal{B}$. (0,5 μον.)

Θέμα 5. Δείξτε ότι

α) για κάθε πρόταση φ της $\Gamma_1^{\theta\alpha}$ χωρίς ποσοδείκτες ισχύει $P \vdash \varphi$ ή $P \vdash \neg\varphi$.
(1 μον.)

β) το P είναι Σ_1-πλήρες, δηλαδή για κάθε Σ_1 πρόταση φ της $\Gamma_1^{\theta\alpha}$ ισχύει

$$\text{αν } \mathcal{N} \models \varphi, \text{ τότε } P \vdash \varphi.$$

(0,5 μον.)

Θέμα 6. Δείξτε ότι η σχέση $LA_2(x)$ που αντιστοιχεί στην έκφραση "ο x είναι αριθμός Gödel αξιώματος με βάση το ΑΣ2" είναι πρωτογενής αναδρομική.
(1,5 μον.)

Θέμα 7. Έστω ότι το P είναι συνεπές και έστω τ_{GR} η αναποκρίσιμη πρόταση του Θεωρήματος Gödel-Rosser. Δικαιολογήστε αναλυτικά γιατί υπάρχει πρόταση σ της $\Gamma_1^{\theta\alpha}$ τέτοια που

$$P + \neg\tau_{GR} \nvdash \sigma \quad \text{και} \quad P + \neg\tau_{GR} \nvdash \neg\sigma.$$

(1 μον.)