

ΣΥΝΔΥΑΣΤΙΚΗ Ι, ΜΑΡΤΙΟΣ 2004

Θέμα 1. Δυο χώρες Α και Β προσέρχονται για διμερείς συνομιλίες με μια αντιπροσωπεία 15 (διακεκριμένων) ατόμων η καθεμία. Για τις συνομιλίες θα σχηματιστούν 3 επιτροπές για θέματα άμυνας, βιομηχανίας και γεωργίας. Η επιτροπή άμυνας θα αποτελείται από 6 άτομα της χώρας Α και 4 της Β, η επιτροπή βιομηχανίας από 7 άτομα της Α και 8 της Β, και η επιτροπή γεωργίας από 2 άτομα της Α και 3 της Β. Σημειώνεται ότι κανένα άτομο (από τα 30) δεν επιτρέπεται να συμμετάσχει ταυτόχρονα σε 2 επιτροπές.

(α) Με πόσους διαφορετικούς τρόπους μπορεί να γίνει ο χωρισμός των αντιπροσωπειών στις επιτροπές;

(β) Σε κάθε επιτροπή ορίζεται ένα από τα συμμετέχοντα (στην επιτροπή) άτομα ως πρόεδρος. Ο πρόεδρος επιλέγεται μεταξύ των ατόμων της χώρας που δεν έχει την πλειοψηφία στην επιτροπή. Με πόσους διαφορετικούς τρόπους μπορεί να γίνει ο χωρισμός των αντιπροσωπειών στις επιτροπές τώρα που οι επιτροπές θα έχουν και πρόεδρο;

Θέμα 2. (α) Να βρεθεί το πλήθος των διαφορετικών κατανομών κ ομοίων σφαιριδίων σε $\nu + 1$ διαφορετικά κελιά ($3 \leq \kappa \leq \nu + 3$), όταν το πρώτο κελί χωράει το πολύ 3 σφαιρίδια, ενώ τα υπόλοιπα ν κελιά χωρούν το πολύ ένα σφαιρίδιο το καθένα.

(β) Πόσες ακέραιες λύσεις έχει η γραμμική εξίσωση

$$x_1 + x_2 + \dots + x_\nu + x_{\nu+1} = \kappa + \frac{(\nu+1)(\nu+2)}{2},$$

όπου $1 \leq x_1 \leq 4$, και $i \leq x_i \leq i+1$ για $i = 2, 3, \dots, \nu, \nu+1$;

Θέμα 3. Με πόσους τρόπους μπορούμε να γράψουμε μια 'λέξη' (ίσως χωρίς νόημα) των 6 γραμμάτων, χρησιμοποιώντας το αλφάβητό $\{A, B, \Gamma, \Delta, E, Z, H, \Theta, I\}$, έτσι ώστε να εμφανίζονται όλα τα 'φωνήεντα' $\{A, E, H, I\}$ στη λέξη;

Θέμα 4. Έστω $\Delta(\nu, \kappa)$ το πλήθος των επαναληπτικών διατάξεων των ν στοιχείων $\{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_\nu\}$ ανά κ , όπου κάθε στοιχείο επιτρέπεται να εμφανίζεται μία ή τρεις φορές στη διάταξη. Να υπολογίσετε:

(α) την (Εκθετική) γεννήτρια των αριθμών $\Delta(\nu, \kappa)$,

$$E(t) = \sum_{\kappa=0}^{\infty} \Delta(\nu, \kappa) \frac{t^\kappa}{\kappa!}.$$

(β) τους αριθμούς $\Delta(\nu, 3\nu)$ και $\Delta(\nu, 3\nu - 1)$.

ΝΑ ΓΡΑΦΟΥΝ 3 ΑΠΟ ΤΑ 4 ΘΕΜΑΤΑ ΣΕ $2\frac{1}{2}$ ΩΡΕΣ. ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ!!!