

ΣΥΝΔΥΑΣΤΙΚΗ Ι, ΝΟΕΜΒΡΙΟΣ 2003

Θέμα 1. Τα 52 διακεκριμένα τραπουλόχαρτα μιας τράπουλας πρόκειται να μοιραστούν σε 4 διακεκριμένους παίχτες Α, Β, Γ, Δ, από 13 στον καθένα. Να βρεθεί με πόσους τρόπους μπορεί να γίνει η μοιρασιά σε καθεμιά από τις παρακάτω περιπτώσεις:

- (α) Ο παίχτης Α παίρνει και τους 4 άσσους.
- (β) Όλοι οι παίχτες παίρνουν από έναν άσσο.
- (γ) Χωρίς περιορισμό.

Θέμα 2. (α) Να βρεθεί το πλήθος των υποσυνόλων του $\Omega = \{1, 2, \dots, 3\nu\}$ που πληρούν ταυτόχρονα τις εξής συνθήκες:

- (i) περιέχουν όλους τους αριθμούς του Ω που είναι (γνήσια) μεγαλύτεροι από το 2ν ,
- (ii) περιέχουν ακριβώς $2\nu - 1$ στοιχεία,
- (iii) περιέχουν το πολύ κ στοιχεία από τα $1, 2, \dots, \nu$.

[Οι θετικοί ακέραιοι ν και κ δίδονται, και μάλιστα υποτίθεται ότι ικανοποιούν τη σχέση $1 \leq \kappa \leq \nu - 1$.]

(β) Αν $\nu \geq 3$ και $\kappa = \nu - 2$, να δείξετε ότι ο αριθμός των υποσυνόλων που πληρούν ταυτόχρονα τις παραπάνω συνθήκες (i), (ii) και (iii) του (α) είναι

$$\binom{2\nu}{\nu - 1} - \nu.$$

Θέμα 3. Επαναλαμβάνουμε 20 φορές την εξής διαδικασία: Εξάγουμε ένα τραπουλόχαρτο από μια τράπουλα (αποτελούμενη από 52 διακεκριμένα τραπουλόχαρτα), το καταγράφουμε, και το επαναποθετούμε στην τράπουλα (σε τυχαία θέση). Στο τέλος των 20 επαναλήψεων, το αποτέλεσμα θα είναι μια διατεταγμένη εικοσάδα από τραπουλόχαρτα (όχι κατ' ανάγκη διαφορετικά). Έστω T το πλήθος όλων των εικοσάδων, σε καθεμιά από τις οποίες εμφανίζονται και οι τέσσερις άσσοι της τράπουλας. Αποδείξτε ότι

$$T = \sum_{s=0}^4 (-1)^s \binom{4}{s} (52 - s)^{20}.$$

Θέμα 4. Έστω $D(\nu, \kappa)$ το πλήθος των συνδυασμών με επανάληψη των στοιχείων του $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_{2\nu}\}$ ανά κ , όπου τα στοιχεία με περιττό δείκτη i εμφανίζονται το πολύ μία φορά το καθένα, ενώ τα στοιχεία με άρτιο δείκτη i εμφανίζονται (0 ή) άρτιο αριθμό φορές, το καθένα. Να υπολογίσετε:

(α) τη γεννήτρια

$$A(t) = \sum_{\kappa=0}^{\infty} D(\nu, \kappa) t^{\kappa}.$$

(β) τον αριθμό $D(\nu, \kappa)$.

ΝΑ ΓΡΑΦΟΥΝ 3 ΑΠΟ ΤΑ 4 ΘΕΜΑΤΑ ΣΕ 2½ ΩΡΕΣ. ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ!!!