Καθηγητής ΧΡΙΣΤΟΣ Γ. ΦΙΛΟΣ
Τομέας Μαθηματικής Ανάλυσης
Τμήμα Μαθηματικών
Πανεπιστήμιο Ιωαννίνων
Τ. Θ. 1186, 451 10 ΙΩΑΝΝΙΝΑ

Τηλ.: 26510-98288, Fax: 26510-98200
E-mail: cphilos@cc.uoi.gr
URL: http://www.math.uoi.gr/~cphilos

ΙΟΥΛΙΟΣ 2007

ΕΙΣΑΓΩΓΗ ΣΤΙΣ ΔΙΑΦΟΡΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ

√ ~~ΘΕΜΑ~~ I [ΜΟΝ. 1]

Έστω η διαφορική εξίσωση

(E) $$x'(t) = x(t)\left[a - bx(t)\right], \quad t \geqq 0,$$

όπω a και b είναι θετικές πραγματικές σταθερές. Να αποδειχθεί ότι κάθε λύση x της (E) με $0 < x(0) < \frac{a}{b}$ παραμένει θετική για όλα τα $t > 0$ και τείνει, για $t \to \infty$, προς τη σταθερή θετική λύση της (E).

√ ~~ΘΕΜΑ~~ II [ΜΟΝ. 1]

Να επιλυθεί το πρόβλημα αρχικών τιμών

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2xy}{x^2 + y^2 e^y}, \quad y(1) = 1.$$

√ ~~ΘΕΜΑ~~ III [ΜΟΝ. 1]

Να αποδειχθεί ότι μία αναγκαία συνθήκη ώστε η λύσεις μίας ομογενούς γραμμικής διαφορικής εξίσωσης n-τάξης με διάστημα ορισμού I να είναι γραμμικά ανεξάρτητες είναι ο μη μηδενισμός της ορίζουσας Wronski αυτών παντού στο I.

✓ ~~ΘΕΜΑ~~ IV [ΜΟΝ. 1]

Έστω (E_0) μία ομογενής γραμμική διαφορική εξίσωση δεύτερης τάξης με διάστημα ορισμού I. Πότε ένα σημείο $x_0 \in I$ καλείται ομαλό σημείο, ανώμαλο σημείο, κανονικό ανώμαλο σημείο της (E_0); Να διατυπωθεί το Θεώρημα το σχετικό με την εύρεση δύο γραμμικά ανεξάρτητων δυναμοσειρών λύσεων γύρω από ένα κανονικό ανώμαλο σημείο x_0 της (E_0).

✓ ~~ΘΕΜΑ~~ V [ΜΟΝ. 2]

Έστω η Euler ομογενής γραμμική διαφορική εξίσωση

$$(E_0) \quad \alpha_n x^n y^{(n)} + \alpha_{n-1} x^{n-1} y^{(n-1)} + \dots + \alpha_1 x y' + \alpha_0 y = 0, \; x \geqq 1,$$

όπου α_i $(i=0,1,\dots,n-1,n)$ είναι πραγματικοί αριθμοί και ισχύει $\alpha_n \alpha_{n-1} < 0$. Να αποδειχθεί ότι η (E_0) έχει μία τουλάχιστον λύση y, τέτοια ώστε η y ή μία τουλάχιστον από τις παραγώγους $y^{(k)}$ $(k=1,\dots,n-1)$ αυτής να είναι μη φραγμένη συνάρτηση στο διάστημα $[1,\infty)$.

ΘΕΜΑ VI [ΜΟΝ. 2]

Έστω η γραμμική διαφορική εξίσωση δεύτερης τάξης

$$(E) \qquad x^2 \frac{d^2y}{dx^2} + (2\alpha+1)x\frac{dy}{dx} + \omega^2 y = c\cos(\omega \log x), \; x>0,$$

όπου α, ω και c είναι πραγματικοί αριθμοί με $0 \leqq \alpha < \omega$ και $c \neq 0$. Να βρεθούν όλες οι πραγματικές λύσεις της (E).

Ειδικά, να βρεθεί η λύση y_0 της (E) που πληροί τις αρχικές συνθήκες $y_0(1)=y_0'(1)=0$.

~~ΘΕΜΑ~~ VII [ΜΟΝ. 2]

Έστω η ομογενής γραμμική διαφορική εξίσωση δεύτερης τάξης

$$(E_0) \qquad (1-x^2)y''-2xy'+2y=0, \ -1<x<1.$$

Υποχρεωτικά με τη μέθοδο των δυναμοσειρών, να βρεθούν οι λύσεις y_1 και y_2 της (E_0) που πληρούν τις αρχικές συνθήκες

$$y_1(0)=1, \ y_1'(0)=0 \quad \text{και} \quad y_2(0)=0, \ y_2'(0)=1.$$

Στη συνέχεια, να αποδειχθεί ότι η συνάρτηση

$$h(x)=\frac{x}{2}\log\frac{1+x}{1-x}-1, \ -1<x<1$$

είναι μία λύση της (E_0) και να εκφρασθεί η h ως ένας γραμμικός συνδυασμός των y_1 και y_2.

Καλή Επιτυχία!

Καθηγητής ΧΡΙΣΤΟΣ Γ. ΦΙΛΟΣ
Τομέας Μαθηματικής Ανάλυσης
Τμήμα Μαθηματικών
Πανεπιστήμιο Ιωαννίνων
Τ. Θ. 1186, 451 10 ΙΩΑΝΝΙΝΑ

Τηλ.: 26510-98288, Fax: 26510-98200
E-mail: cphilos@cc.uoi.gr
URL: http://www.math.uoi.gr/~cphilos

ΦΕΒΡΟΥΑΡΙΟΣ 16, 2007

"ΕΙΣΑΓΩΓΗ ΣΤΙΣ ΔΙΑΦΟΡΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ"

~~1~~ [ΜΟΝ. 1] Έστω η διαφορική εξίσωση

(E) $$x'(t) = x(t)\,[a - bx(t)], \quad t \geqq 0,$$

όπου a και b είναι θετικές πραγματικές σταθερές. Να αποδειχθεί ότι, για κάθε λύση x της (E) με $0 < x(0) < \frac{a}{b}$, ισχύει $x(t) > 0$ για $t \geqq 0$ και $\lim_{t \to \infty} x(t) = \frac{a}{b}$.

2 [ΜΟΝ. 1] (i) Ας είναι y_1, y_2 και y_3 συναρτήσεις, οι οποίες έχουν παραγώγους δεύτερης τάξης σε ένα διάστημα I. Να αποδειχθεί ότι μία αναγκαία συνθήκη για να είναι οι συναρτήσεις αυτές γραμμικά εξαρτημένες είναι ο μηδενισμός της ορίζουσας Wronski αυτών παντού στο I.

(ii) Ας είναι y_1 και y_2 δύο λύσεις μίας ομογενούς γραμμικής διαφορικής εξίσωσης τρίτης τάξης με διάστημα ορισμού I. Έστω x_0 ένα σημείο του I. Να αποδειχθεί ότι, τα διανύσματα

$$\begin{pmatrix} y_1(x_0) \\ y_1'(x_0) \\ y_1''(x_0) \end{pmatrix} \quad \text{και} \quad \begin{pmatrix} y_2(x_0) \\ y_2'(x_0) \\ y_2''(x_0) \end{pmatrix}$$

είναι γραμμικά ανεξάρτητα, αν οι λύσεις y_1 και y_2 είναι γραμμικά ανεξάρτητες.

3) [ΜΟΝ. 1] Ας είναι E το σύνολο όλων των πραγματικών λύσεων της ομογενούς γραμμικής διαφορικής εξίσωσης

$$y''' + y'' - 2y = 0,$$

$\lambda^3+\lambda^2-2 = \lambda^3+\lambda^2-2\lambda+2\lambda-2 = \lambda(\lambda^2+\lambda-2)+2(\lambda-1) = \lambda(\lambda-1)(\lambda$

οι οποίες τείνουν προς το μηδέν για $x \to \infty$. Να αποδειχθεί ότι E είναι ένας πραγματικός γραμμικός χώρος και να βρεθεί μία βάση αυτού. Επίσης, να βρεθεί y στο E με $y(0)=0$ και $y'(0)=2$.

4) [ΜΟΝ. 1] Ας είναι y μία λύση της ομογενούς γραμμικής διαφορικής εξίσωσης $y'''-y=0$ με $\lim_{x\to\infty} y(x)=0$. Να βρεθούν σταθερές a, b, c και d, όχι όλες μηδέν, έτσι ώστε $ay(0)+by'(0)+cy''(0)=d$.

$\lambda^3-1=(\lambda-1)(\lambda^2+\lambda+1)$

5) [ΜΟΝ. 2] Με τη βοήθεια της αντικατάστασης $z=(1+x^2)y$, να επιλυθεί η γραμμική διαφορική εξίσωση

$$x^2(1+x^2)y'' + x(3x^2-1)y' + (1+x^2)y = x^2\log x, \quad x>0.$$

6) [ΜΟΝ. 1,5] Να αποδειχθεί ότι η ομογενής γραμμική διαφορική εξίσωση

$$x^2y'' - xy' + 8(x^2-1)y = 0$$

έχει μία λύση y_1 της μορφής

$$y_1(x) = |x|^\lambda\left(1+\sum_{n=1}^{\infty} c_n x^n\right) \quad \text{για } x\neq 0,$$

όπου $\lambda>0$ και c_n $(n=1,2,\dots)$ είναι πραγματικοί αριθμοί· να βρεθεί η λύση y_1. Επίσης, να γραφεί (χωρίς να βρεθεί) μία λύση y_2 γραμμικά ανεξάρτητη προς την y_1.

(7) [ΜΟΝ. 2,5] Ας είναι γ και ω δύο θετικοί πραγματικοί αριθμοί με $\gamma \neq \omega$. Ακόμα, ας είναι f μία συνεχής πραγματική συνάρτηση στο διάστημα $[0,\infty)$ με $\lim_{x\to\infty} f(x) = L$, όπου L είναι μία πραγματική σταθερά. Να αποδειχθεί ότι, για κάθε λύση y της γραμμικής διαφορικής εξίσωσης

$$y'' + 2\gamma y' + \omega^2 y = f,$$

ισχύει

$$\lim_{x\to\infty} y(x) = \frac{L}{\omega^2} \text{ και } \lim_{x\to\infty} y'(x) = 0.$$

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ!

Καθηγητής ΧΡΙΣΤΟΣ Γ. ΦΙΛΟΣ
Τομέας Μαθηματικής Ανάλυσης
Τμήμα Μαθηματικών
Πανεπιστήμιο Ιωαννίνων
Τ. Θ. 1186, 451 10 ΙΩΑΝΝΙΝΑ

Τηλ.: 26510-98288, Fax: 26510-98200
E-mail: cphilos@cc.uoi.gr
URL: http://www.math.uoi.gr/~cphilos

ΟΚΤΩΒΡΙΟΣ 2006

ΕΙΣΑΓΩΓΗ ΣΤΙΣ ΔΙΑΦΟΡΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ

(1) Να επιλυθούν τα προβλήματα αρχικών τιμών:

~~(i)~~ $$2\frac{dy}{dx}+\frac{1}{x+1}y+2(x^2-1)y^3=0,\quad y(0)=-1. \quad [\text{ΜΟΝ. } 1]$$

~~(ii)~~ $$\frac{dy}{dx}=\frac{2xy}{x^2+y^2e^y},\quad y(1)=1. \quad [\text{ΜΟΝ. } 1]$$

~~(2)~~ Ας είναι β, γ και κ θετικοί αριθμοί. Να αποδειχθεί ότι όλες οι λύσεις της γραμμικής διαφορικής εξίσωσης
$$y''+\beta y'+\gamma y=xe^{-\kappa x},\quad x\in\mathbb{R}$$
τείνουν προς το μηδέν για $x\to\infty$. [ΜΟΝ. 2]

(3) Έστω η ομογενής γραμμική διαφορική εξίσωση

$$(E_0)\qquad \sum_{\kappa=0}^{5}\alpha_\kappa y^{(\kappa)}=0,$$

όπου α_κ ($\kappa=0,1,2,3,4,5$) είναι πραγματικοί αριθμοί. Ας υποθέσουμε ότι το πολυώνυμο $\sum_{\kappa=0}^{5}\alpha_\kappa\lambda^\kappa$ έχει την απλή ρίζα $\lambda_1=\mu$ και τις διπλές ρίζες $\lambda_2=\sigma+i\tau$ και $\lambda_3=\sigma-i\tau$, όπου μ, σ και $\tau > 0$ είναι πραγματικοί αριθμοί.

(i) Έστω ότι $\mu > \sigma$ και ας είναι γ ένας πραγματικός αριθμός με $-\mu \leqq \gamma < -\sigma$. Να αποδειχθεί ότι το σύνολο όλων των πραγματικών λύσεων y της (E_0) με $\lim\limits_{x\to\infty} e^{\gamma x} y(x) = 0$ είναι ένας πραγματικός γραμμικός χώρος και να βρεθεί μία βάση αυτού. [ΜΟΝ. 1]

(ii) Ας είναι δ ένας πραγματικός αριθμός με $\delta > \mu$ και $\delta > \sigma$. Να αποδειχθεί ότι, για κάθε λύση y της (E_0), ισχύει

$$\lim_{x\to\infty} e^{-\delta x} y(x) = \lim_{x\to\infty} e^{-\delta x} y'(x) = 0. \quad [\text{ΜΟΝ. } 1]$$

4) Ας είναι (E_0) μία ομογενής γραμμική διαφορική εξίσωση δεύτερης τάξης με σταθερούς συντελεστές. Έστω μ ένας πραγματικός αριθμός μεγαλύτερος από το πραγματικό μέρος κάθε ρίζας του χαρακτηριστικού πολυωνύμου της (E_0). Να αποδειχθεί ότι, για τυχούσα λύση y της (E_0), υπάρχει σταθερά $K > 0$ έτσι ώστε

$$\max\{|y(x)|, |y'(x)|\} \leqq K e^{\mu x} \text{ για κάθε } x \geqq 0. \quad [\text{ΜΟΝ. } 2]$$

~~5~~) Να επιλυθεί το πρόβλημα αρχικών τιμών

$$x(2-x)y'' - 6(x-1)y' - 4y = 0;\ y(1) = 1,\ y'(1) = 3.$$

Επίσης, να διατυπωθεί το Θεώρημα το σχετικό με την εύρεση δύο γραμμικά ανεξάρτητων λύσεων γύρω από ένα κανονικό ανώμαλο σημείο μίας ομογενούς γραμμικής διαφορικής εξίσωσης δεύτερης τάξης. [ΜΟΝ. 2]

Καλή Επιτυχία

Καθηγητής ΧΡΙΣΤΟΣ Γ. ΦΙΛΟΣ
Τομέας Μαθηματικής Ανάλυσης
Τμήμα Μαθηματικών
Πανεπιστήμιο Ιωαννίνων
Τ. Θ. 1186, 451 10 ΙΩΑΝΝΙΝΑ

Τηλ.: 26510-98288, Fax: 26510-98200
E-mail: cphilos@cc.uoi.gr
URL: http://www.math.uoi.gr/~cphilos

ΙΟΥΝΙΟΣ 2006

"ΕΙΣΑΓΩΓΗ ΣΤΙΣ ΔΙΑΦΟΡΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ"

ΘΕΜΑ Ι [ΜΟΝ. 1,5]

$\frac{1}{1+x^2}$

Ας είναι α ένας πραγματικός αριθμός. Να βρεθεί ένας ολοκληρωτικός παράγοντας της μορφής $\rho(x,y)=\phi(x+y)$ (όπου ϕ είναι κατάλληλη συνάρτηση που θα πρέπει να προσδιορισθεί) για τη διαφορική εξίσωση

$$(\alpha xy-2y^2)\,dx+(\alpha xy-2x^2)\,dy=0.$$

Στη συνέχεια, με χρήση αυτού του ολοκληρωτικού παράγοντα ή με άλλον τρόπο, να επιλυθεί η διαφορική εξίσωση αυτή.

ΘΕΜΑ ΙΙ [ΜΟΝ. 1]

(i) Ας είναι y_1, y_2 και y_3 συναρτήσεις, οι οποίες έχουν παραγώγους δεύτερης τάξης σε ένα διάστημα I. Να αποδειχθεί ότι μία αναγκαία συνθήκη για να είναι οι συναρτήσεις αυτές γραμμικά εξαρτημένες είναι ο μηδενισμός της ορίζουσας Wronski αυτών παντού στο I.

(ii) Ας είναι y_1 και y_2 δύο λύσεις μίας ομογενούς γραμμικής διαφορικής εξίσωσης τρίτης τάξης με διάστημα ορισμού I.

Έστω x_0 ένα σημείο του I. Να αποδειχθεί ότι, αν οι λύσεις y_1 και y_2 είναι γραμμικά ανεξάρτητες, τότε τα διανύσματα

$$\begin{pmatrix} y_1(x_0) \\ y_1'(x_0) \\ y_1''(x_0) \end{pmatrix} \quad \text{και} \quad \begin{pmatrix} y_2(x_0) \\ y_2'(x_0) \\ y_2''(x_0) \end{pmatrix}$$

είναι γραμμικά ανεξάρτητα.

ΘΕΜΑ ΙΙΙ [ΜΟΝ. 1]

Ας είναι y μία λύση της ομογενούς γραμμικής διαφορικής εξίσωσης $y''' - y = 0$ με $\lim_{x\to\infty} y(x) = 0$. Να βρεθούν σταθερές a, b, c και d, όχι όλες μηδέν, έτσι ώστε $ay(0) + by'(0) + cy''(0) = d$.

$\lambda^3 - 1 = (\lambda - 1)(\lambda^2 + \lambda + 1)$

ΘΕΜΑ ΙV [ΜΟΝ. 2]

Ας είναι β και γ θετικές πραγματικές σταθερές με $\beta^2 \neq 4\gamma$. Να αποδειχθεί ότι, για κάθε λύση y της γραμμικής διαφορικής εξίσωσης

$$y'' + \beta y' + \gamma y = \frac{\log(1+x)}{1+\sqrt{x}}, \quad x \geqq 0,$$

ισχύει

$$\lim_{x\to\infty} y(x) = \lim_{x\to\infty} y'(x) = 0.$$

ΘΕΜΑ ~~V~~ [ΜΟΝ. 1,5]

Με χρήση ενός μετασχηματισμού της μορφής $t = x^\alpha$ (όπου α είναι κατάλληλη πραγματική σταθερά που θα πρέπει να προσδιορισθεί), να επιλυθεί η γραμμική διαφορική εξίσωση

$$x\frac{d^2y}{dx^2}-(2x^2+1)\frac{dy}{dx}-8x^3y=16x^3e^{-x^2},\quad x>0.$$

ΘΕΜΑ ~~VI~~ [ΜΟΝ. 2]

Ας είναι p μία μη αρνητική σταθερά. Να βρεθούν οι δυναμοσειρές λύσεις, γύρω από το σημείο $x_0=0$, της ομογενούς γραμμικής διαφορικής εξίσωσης

$$(1-x^2)y''-xy'+p^2y=0.$$

Στη συνέχεια, να επιλυθούν τα προβλήματα αρχικών τιμών

$$(1-x^2)y''-xy'+16y=0;\quad y(0)=1,\ y'(0)=0$$

και

$$(1-x^2)y''-xy'+25y=0;\quad y(0)=0,\ y'(0)=1.$$

ΘΕΜΑ VII [ΜΟΝ. 1]

Έστω η γραμμική μερική διαφορική εξίσωση πρώτης τάξης

(E) $$Az_x+Bz_y+Cz=\Phi,$$

όπου A, B, C και Φ είναι συνεχείς πραγματικές συναρτήσεις σε έναν τόπο Ω του $\mathbb{R}^2$ και $A(x,y)\neq 0$ για όλα τα $(x,y)\in\Omega$. Να αναπτυχθεί λεπτομερώς η μέθοδος επίλυσης της (E).

Καλή Επιτυχία

Καθηγητής ΧΡΙΣΤΟΣ Γ. ΦΙΛΟΣ
Τομέας Μαθηματικής Ανάλυσης
Τμήμα Μαθηματικών
Πανεπιστήμιο Ιωαννίνων
Τ. Θ. 1186, 451 10 ΙΩΑΝΝΙΝΑ

Τηλ.: 26510-98288, Fax: 26510-98200
E-mail: cphilos@cc.uoi.gr
URL: http://www.math.uoi.gr/~cphilos

ΙΑΝΟΥΑΡΙΟΣ 2006

"ΕΙΣΑΓΩΓΗ ΣΤΙΣ ΔΙΑΦΟΡΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ"

ΘΕΜΑ I [ΜΟΝ. 3]

(i) [ΜΟΝ. 0,5] Να αναπτυχθεί η μέθοδος για την επίλυση μίας διαφορικής εξίσωσης Riccati.

(ii) [ΜΟΝ. 1,5] Ας είναι f_j $(j=1,\dots,m)$ πραγματικές συναρτήσεις, οι οποίες έχουν $(m-1)$-παραγώγους σε ένα διάστημα I. Να αποδειχθεί ότι μία ικανή συνθήκη για να είναι οι f_j $(j=1,\dots,m)$ γραμμικά ανεξάρτητες είναι

(C) $\quad W(f_1,\dots,f_m)(x_0)\neq 0$ για κάποιο $x_0\in I$.

Είναι η (C) μία αναγκαία συνθήκη για να είναι οι f_j $(j=1,\dots,m)$ γραμμικά ανεξάρτητες;

(iii) [ΜΟΝ. 0,5] Να διατυπωθεί το Θεώρημα το σχετικό με την εύρεση δύο γραμμικά ανεξάρτητων λύσεων γύρω από ένα κανονικό ανώμαλο σημείο μίας ομογενούς γραμμικής διαφορικής εξίσωσης δεύτερης τάξης.

(iv) [ΜΟΝ. 0,5] Για μία ομογενή γραμμική διαφορική εξίσωση n-τάξης, να αποδειχθεί ότι υπάρχουν βασικά σύνολα.

ΘΕΜΑ II [ΜΟΝ. 1,5]

Έστω η πρώτης τάξης γραμμική διαφορική εξίσωση

(E) $$y' + py = q,$$

όπου p και q είναι συνεχείς πραγματικές συναρτήσεις στο διάστημα $[0,\infty)$. Ας υποθέσουμε ότι $p(x) \geqq \mu$ για όλα τα $x \geqq x_0$, όπου $x_0 \geqq 0$ και μ είναι μία θετική σταθερά, και ότι η συνάρτηση q είναι φραγμένη στο $[0,\infty)$. Να αποδειχθεί ότι όλες οι λύσεις της (E) είναι φραγμένες στο διάστημα $[0,\infty)$.

ΘΕΜΑ III [ΜΟΝ. 1,5]

Έστω η ομογενής γραμμική διαφορική εξίσωση

(E_0) $$\sum_{k=0}^{5} \alpha_k y^{(k)} = 0,$$

όπου α_k $(k=0,1,2,3,4,5)$ είναι πραγματικοί αριθμοί. Ας υποθέσουμε ότι το πολυώνυμο $\sum_{k=0}^{5} \alpha_k \lambda^k$ έχει την απλή ρίζα $\lambda_1 = \mu$ και τις διπλές ρίζες $\lambda_2 = \sigma + i\tau$ και $\lambda_3 = \sigma - i\tau$, όπου μ, σ και $\tau > 0$ είναι πραγματικοί αριθμοί. Έστω ότι $\mu > \sigma$ και ας είναι γ ένας πραγματικός αριθμός με $-\mu \leqq \gamma < -\sigma$. Να αποδειχθεί ότι το σύνολο όλων των πραγματικών λύσεων y της (E_0) με $\lim_{x\to\infty} e^{\gamma x} y(x) = 0$ είναι ένας πραγματικός γραμμικός χώρος και να βρεθεί μία βάση αυτού.

ΘΕΜΑ IV [ΜΟΝ. 2]

Έστω η Euler ομογενής γραμμική διαφορική εξίσωση

(*) $$\alpha_n x^n y^{(n)} + \alpha_{n-1} x^{n-1} y^{(n-1)} + \cdots + \alpha_1 x y' + \alpha_0 y = 0, \quad x \geqq 1,$$

όπου α_i $(i=0,1,\dots,n-1,n)$ είναι πραγματικοί αριθμοί και ισχύει $\alpha_n\alpha_{n-1}<0$. Να αποδειχθεί ότι η (*) έχει μία τουλάχιστον λύση y, τέτοια ώστε η y ή μία τουλάχιστον από τις παραγώγους $y^{(k)}$ $(k=1,\dots,n-1)$ αυτής να είναι μη φραγμένη συνάρτηση στο διάστημα $[1,\infty)$.

ΘΕΜΑ V [ΜΟΝ. 2]

Έστω η δεύτερης τάξης ομογενής γραμμική διαφορική εξίσωση

$$(D_0) \qquad (1-x^2)y''-2xy'+2y=0 \,, \; x\in(-1,1).$$

Υποχρεωτικά με τη μέθοδο των δυναμοσειρών, να βρεθούν οι λύσεις y_1 και y_2 της (D_0) που πληρούν τις αρχικές συνθήκες

$$y_1(0)=1, y_1'(0)=0 \quad \text{και} \quad y_2(0)=0, y_2'(0)=1.$$

Στη συνέχεια, να αποδειχθεί ότι η συνάρτηση

$$h(x)=\frac{x}{2}\log\frac{1+x}{1-x}-1, \; x\in(-1,1)$$

είναι μία λύση της (D_0) και να εκφρασθεί η h ως ένας γραμμικός συνδυασμός των y_1 και y_2.

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ

Καθηγητής ΧΡΙΣΤΟΣ Γ. ΦΙΛΟΣ
Τομέας Μαθηματικής Ανάλυσης
Τμήμα Μαθηματικών
Πανεπιστήμιο Ιωαννίνων
Τ. Θ. 1186, 451 10 ΙΩΑΝΝΙΝΑ

Τηλ.: (0651) 98288, E-Mail: cphilos@cc.uoi.gr

ΣΕΠΤΕΜΒΡΙΟΣ 2005

"ΕΙΣΑΓΩΓΗ ΣΤΙΣ ΔΙΑΦΟΡΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ"

ΘΕΜΑ I [ΜΟΝ. 1,5]

Ας είναι b και c θετικές σταθερές. Να αποδειχθεί ότι κάθε λύση z της διαφορικής εξίσωσης $\frac{dz}{dx} = -bz(z+1)$ με $z(0) > -1$ είναι τέτοια ώστε $z(x) > -1$ για $x > 0$ και τείνει προς τη σταθερή λύση $z_0 = 0$ για $x \to \infty$. Στη συνέχεια, υποχρεωτικά με χρήση του συμπεράσματος αυτού, να αποδειχθεί ότι κάθε λύση y της διαφορικής εξίσωσης $\frac{dy}{dx} = y(b - cy)$ με $y(0) > 0$ παραμένει θετική για $x > 0$ και τείνει προς τη σταθερή λύση $y_0 = \frac{b}{c}$ για $x \to \infty$.

ΘΕΜΑ II [ΜΟΝ. 1,5]

Ας είναι $f_1, f_2, \ldots, f_m$ πραγματικές συναρτήσεις, οι οποίες έχουν $(m-1)$-τάξης παραγώγους σε ένα διάστημα I. Να αποδειχθεί ότι μία αναγκαία συνθήκη για να είναι οι $f_1, f_2, \ldots, f_m$ γραμμικά εξαρτημένες είναι

(C) $\quad W(f_1, f_2, \ldots, f_m)(x) = 0$ για όλα τα $x \in I$.

Είναι η (C) μία ικανή συνθήκη για να είναι οι $f_1, f_2, \ldots, f_m$ γραμμικά εξαρτημένες;

Καθηγητής ΧΡΙΣΤΟΣ Γ. ΦΙΛΟΣ
Τομέας Μαθηματικής Ανάλυσης
Τμήμα Μαθηματικών
Πανεπιστήμιο Ιωαννίνων
Τ. Θ. 1186, 451 10 ΙΩΑΝΝΙΝΑ

Τηλ.: (0651) 98288, E-Mail: cphilos@cc.uoi.gr

ΘΕΜΑ ΙΙΙ [ΜΟΝ. 2]

Έστω η ομογενής γραμμική διαφορική εξίσωση δεύτερης τάξης

$$(D_0) \qquad (1-x^2)y'' - 2xy' + 2y = 0, \quad -1<x<1.$$

Υποχρεωτικά με τη μέθοδο των δυναμοσειρών, να βρεθούν οι λύσεις y_1 και y_2 της (D_0) που πληρούν τις αρχικές συνθήκες

$$y_1(0)=1,\ y_1'(0)=0 \quad \text{και} \quad y_2(0)=0,\ y_2'(0)=1.$$

Στη συνέχεια, να αποδειχθεί ότι η συνάρτηση

$$h(x) = \frac{x}{2}\log\frac{1+x}{1-x} - 1, \quad -1<x<1$$

είναι μία λύση της (D_0) και να εκφρασθεί η h ως ένας γραμμικός συνδυασμός των y_1 και y_2.

ΘΕΜΑ IV [ΜΟΝ. 2,5]

Έστω η πέμπτης τάξης ομογενής γραμμική διαφορική εξίσωση

$$(E_0) \qquad \sum_{k=0}^{5} \alpha_k y^{(k)} = 0,$$

της οποίας οι συντελεστές είναι πραγματικοί αριθμοί. Ας υποθέσουμε ότι το πολυώνυμο $\sum_{k=0}^{5} \alpha_k \lambda^k$ έχει την απλή ρίζα

Καθηγητής ΧΡΙΣΤΟΣ Γ. ΦΙΛΟΣ
Τομέας Μαθηματικής Ανάλυσης
Τμήμα Μαθηματικών
Πανεπιστήμιο Ιωαννίνων
Τ. Θ. 1186, 451 10 ΙΩΑΝΝΙΝΑ

Τηλ.: (0651) 98288, E-Mail: cphilos@cc.uoi.gr

$\lambda_1=\mu$ και τις διπλές ρίζες $\lambda_2=\sigma+i\tau$ και $\lambda_3=\sigma-i\tau$, όπου μ,σ και $\tau>0$ είναι πραγματικοί αριθμοί.

(i) Έστω ότι $\mu>\sigma$ και ας είναι γ ένας πραγματικός αριθμός με $-\mu\leqq\gamma<-\sigma$. Να αποδειχθεί ότι το σύνολο όλων των πραγματικών λύσεων y της (E_0) με $\lim\limits_{x\to\infty} e^{\gamma x}y(x)=0$ είναι ένας πραγματικός γραμμικός χώρος και να βρεθεί μία βάση αυτού.

(ii) Ας είναι δ ένας πραγματικός αριθμός με $\delta>\mu$ και $\delta>\sigma$. Να αποδειχθεί ότι, για κάθε λύση y της (E_0), ισχύει

$$\lim_{x\to\infty} e^{-\delta x}y(x)=\lim_{x\to\infty} e^{-\delta x}y'(x)=0.$$

ΘΕΜΑ V [ΜΟΝ. 2,5]

Έστω η γραμμική διαφορική εξίσωση δεύτερης τάξης

$$(E)\qquad x^2\frac{d^2y}{dx^2}+(2\alpha+1)x\frac{dy}{dx}+\omega^2y=c\cos(\omega\log x),\quad x>0,$$

όπου α,ω και c είναι πραγματικοί αριθμοί με $0\leqq\alpha<\omega$ και $c\neq0$. Να βρεθούν όλες οι πραγματικές λύσεις της (E). Ειδικά, να βρεθεί η λύση y_0 της (E) που πληροί τις αρχικές συνθήκες $y_0(1)=y_0'(1)=0$.

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ

Καθηγητής ΧΡΙΣΤΟΣ Γ. ΦΙΛΟΣ
Τομέας Μαθηματικής Ανάλυσης
Τμήμα Μαθηματικών
Πανεπιστήμιο Ιωαννίνων
Τ. Θ. 1186, 451 10 ΙΩΑΝΝΙΝΑ

Τηλ.: (0651) 98288, E-Mail: cphilos@cc.uoi.gr

ΙΟΥΝΙΟΣ 2005

"ΕΙΣΑΓΩΓΗ ΣΤΙΣ ΔΙΑΦΟΡΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ"

① [ΜΟΝ. 1] Να αποδειχθεί ότι μία αναγκαία συνθήκη ώστε η λύσεις μίας ομογενούς γραμμικής διαφορικής εξίσωσης n-τάξης με διάστημα ορισμού I να είναι γραμμικά ανεξάρτητες είναι ο μη μηδενισμός της ορίζουσας Wronski αυτών παντού στο I.

② [ΜΟΝ. 0,5] Να διατυπωθεί το Θεώρημα το σχετικό με την εύρεση των δυναμοσειρών λύσεων γύρω από ένα ομαλό σημείο μίας ομογενούς γραμμικής διαφορικής εξίσωσης δεύτερης τάξης.

③ [ΜΟΝ. 1] Να διατυπωθεί και αποδειχθεί ο τύπος του Liouville για ομογενείς γραμμικές διαφορικές εξισώσεις τρίτης τάξης.

④ [ΜΟΝ. 1,5] Να επιλυθεί η διαφορική εξίσωση

$$y' = (x^2+y+1)\left(x^2+y-\frac{3}{2}\right)+1-2x.$$

(Μία μερική λύση αυτής μπορεί εύκολα να βρεθεί.)

⑤ [ΜΟΝ. 1] Ας είναι y_1 και y_2 δύο λύσεις της μη ομογενούς γραμμικής διαφορικής εξίσωσης

$$ay'' + by' + cy = h,$$

όπου a, b, c είναι θετικοί πραγματικοί αριθμοί και h είναι μία συνεχής πραγματική συνάρτηση στο διάστημα $[0, \infty)$. Να αποδειχθεί ότι $\lim\limits_{x\to\infty} [y_1(x) - y_2(x)] = 0$.

(6) [ΜΟΝ. 1] Ας είναι E το σύνολο όλων των πραγματικών λύσεων της ομογενούς γραμμικής διαφορικής εξίσωσης

$$y''' + y'' - 2y = 0,$$

οι οποίες τείνουν προς το μηδέν για $x \to \infty$. Να αποδειχθεί ότι E είναι ένας πραγματικός γραμμικός χώρος και να βρεθεί μία βάση αυτού. Επίσης, να βρεθεί y στο E με $y(0) = 0$ και $y'(0) = 2$.

(7) [ΜΟΝ. 1,5] Να επιλυθεί η γραμμική διαφορική εξίσωση

$$y'' - 6y' + 9y = x^{3/2} e^{3x}.$$

(8) [ΜΟΝ. 0,5] Να βρεθεί η λύση z της μερικής διαφορικής εξίσωσης

$$xyz_x - y^2 z_y - xz = 0; \; x \in \mathbb{R}, \; y > 0,$$

η οποία πληροί τη συνθήκη

$$z(x,1) = x^2, \; x \in \mathbb{R}.$$

(9) [ΜΟΝ. 2] Ας είναι (E_0) μία ομογενής γραμμική

διαφορική εξίσωση δεύτερης τάξης με σταθερούς συντελεστές. Έστω μ ένας πραγματικός αριθμός μεγαλύτερος από το πραγματικό μέρος κάθε ρίζας του χαρακτηριστικού πολυωνύμου της (E_0). Να αποδειχθεί ότι, για τυχούσα λύση y της (E_0), υπάρχει σταθερά $K>0$ έτσι ώστε

$$\max\{|y(x)|,|y'(x)|\} \leqq K e^{\mu x} \text{ για όλα τα } x \geqq 0.$$

10) [ΜΟΝ. 1] Να επιλυθεί το πρόβλημα αρχικών τιμών

$$(1-x^2)y'' - xy' + 16y = 0 \,;\; y(0)=0,\; y'(0)=1.$$

ΔΙΑΡΚΕΙΑ ΕΞΕΤΑΣΗΣ: 3 ΩΡΕΣ

Καλή Επιτυχία

Καθηγητής ΧΡΙΣΤΟΣ Γ. ΦΙΛΟΣ
Τομέας Μαθηματικής Ανάλυσης
Τμήμα Μαθηματικών
Πανεπιστήμιο Ιωαννίνων
Τ. Θ. 1186, 451 10 ΙΩΑΝΝΙΝΑ

Τηλ.: (0651) 98288, E-Mail: cphilos@cc.uoi.gr

ΔΕΚΕΜΒΡΙΟΣ 2004

"ΕΙΣΑΓΩΓΗ ΣΤΙΣ ΔΙΑΦΟΡΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ"

1) [ΜΟΝ. 1,5] Να επιλυθεί η διαφορική εξίσωση

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{y(2x^2+2xy^2+1)}{x+3y^2}.$$

2) [ΜΟΝ. 1] Να αποδειχθεί ότι όλες οι λύσεις της διαφορικής εξίσωσης

$$y' + y\log(2+x^3) = \sin x^2$$

είναι φραγμένες στο διάστημα $[0,\infty)$.

3) [ΜΟΝ. 1,5] Έστω η ομογενής γραμμική διαφορική εξίσωση

(*) $$y'''' + 3y''' + 2y'' - 2y' - 4y = 0.$$

Κ 29

Να βρεθεί ένα βασικό σύνολο πραγματικών λύσεων της (*). Στη συνέχεια, να αποδειχθεί ότι το σύνολο όλων των πραγματικών λύσεων της (*), οι οποίες τείνουν προς το μηδέν για $x\to\infty$, είναι ένας γραμμικός χώρος επί του $\mathbb{R}$ και, επιπλέον, να βρεθεί μία βάση αυτού.

4) [ΜΟΝ. 2] Να επιλυθεί η γραμμική διαφορική εξίσωση

(Ε) $$y''' + \omega^2 y' = f,$$

όπου $\omega>0$ είναι μία σταθερά και f είναι μία συνεχής μη μηδενική συνάρτηση στο διάστημα $[0,\infty)$. Στη συνέχεια, να δοθεί ένα παράδειγμα μίας φραγμένης, συνεχούς και μη μηδενικής συνάρτησης f στο $[0,\infty)$ έτσι ώστε όλες οι λύσεις της (E) να είναι μη φραγμένες στο $[0,\infty)$.

5) [ΜΟΝ. 1] Να επιλυθεί η διαφορική εξίσωση

$$x^3y''+xy'-y=0,\ x>0.$$

6) [ΜΟΝ. 0,5] Να επιλυθεί η μερική διαφορική εξίσωση

$$xz_x+yz_y+xz=x^2+y^2;\ x>0,\ y>0.$$

7) [ΜΟΝ. 2,5] Έστω η Euler ομογενής γραμμική διαφορική εξίσωση

$$(E_0)\quad \alpha_n x^n y^{(n)}+\alpha_{n-1}x^{n-1}y^{(n-1)}+\dots+\alpha_1 xy'+\alpha_0 y=0,\ x\geqq 1,$$

όπου α_i $(i=0,1,\dots,n-1,n)$ είναι πραγματικοί αριθμοί με $\alpha_n\alpha_{n-1}<0$. Να αποδειχθεί ότι η (E_0) έχει μία τουλάχιστον λύση y τέτοια ώστε η λύση y ή μία τουλάχιστον από τις παραγώγους $y^{(k)}$ $(k=1,\dots,n-1)$ αυτής να είναι μη φραγμένη συνάρτηση στο διάστημα $[1,\infty)$.

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ!

...τής ΧΡΙΣΤΟΣ Γ. ΦΙΛΟΣ
...ς Μαθηματικής Ανάλυσης
Τμήμα Μαθηματικών
Πανεπιστήμιο Ιωαννίνων
Τ. Θ. 1186, 451 10 ΙΩΑΝΝΙΝΑ

(0651) 98288, E-Mail: cphilos@cc.uoi.gr

ΣΕΠΤΕΜΒΡΙΟΣ 2004

ΕΙΣΑΓΩΓΗ ΣΤΙΣ ΔΙΑΦΟΡΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ I [ΜΟΝ. 4]

(i) [ΜΟΝ. 0,5] Να αναπτυχθεί η μέθοδος για την επίλυση μίας διαφορικής εξίσωσης Riccati.

(ii) [ΜΟΝ. 1] Να αποδειχθεί ότι μία αναγκαία συνθήκη ώστε η λύσεις μίας ομογενούς γραμμικής διαφορικής εξίσωσης n-τάξης με διάστημα ορισμού I να είναι γραμμικά ανεξάρτητες είναι ο μη μηδενισμός της ορίζουσας Wronski αυτών παντού στο I.

(iii) [ΜΟΝ. 0,8] Να διατυπωθεί το Θεώρημα το σχετικό με την εύρεση δύο γραμμικά ανεξάρτητων λύσεων γύρω από ένα κανονικό ανώμαλο σημείο μίας ομογενούς γραμμικής διαφορικής εξίσωσης δεύτερης τάξης.

(iv) [ΜΟΝ. 1,7] Έστω η γραμμική μερική διαφορική εξίσωση πρώτης τάξης

$$(E) \qquad Az_x + Bz_y + Cz = \Phi,$$

όπου A, B, C και Φ είναι συνεχείς πραγματικές συναρτήσεις σε έναν τόπο Ω του $\mathbb{R}^2$ και $A(x,y) \neq 0$ για όλα τα $(x,y) \in \Omega$. Να αναπτυχθεί λεπτομερώς η μέθοδος επίλυσης της (E).

ΘΕΜΑ II [ΜΟΝ. 2]

Έστω η τρίτης τάξης ομογενής γραμμική διαφορική εξίσωση

$$(E_0) \qquad y''' + p y'' + q y' + r y = 0,$$

όπου p, q και r είναι συνεχείς πραγματικές συναρτήσεις σε ένα διάστημα I. Ας είναι y_1 και y_2 δύο λύσεις της (E_0) τέτοιες ώστε

$$y_1(x) \neq 0 \text{ και } (y_2/y_1)'(x) \neq 0, \text{ για όλα τα } x \in I.$$

Να επιλυθεί η (E_0) με αναγωγή αυτής σε μία πρώτης τάξης ομογενή γραμμική διαφορική εξίσωση.

ΘΕΜΑ III [ΜΟΝ. 1]

Να επιλυθεί το πρόβλημα αρχικών τιμών

$$y'' - y = \frac{1}{x}; \; y(1) = 0, \; y'(1) = -2.$$

ΘΕΜΑ IV [ΜΟΝ. 1,5] 1,5

Με τη βοήθεια μίας αντικατάστασης της μορφής $t = x^\alpha$ (όπου α είναι κατάλληλος πραγματικός αριθμός), να επιλυθεί η γραμμική διαφορική εξίσωση

$$x y'' - y' + 4x^3 y = 4x^5 e^{x^2} \sin x^2, \; x > 0.$$

ΘΕΜΑ V [ΜΟΝ. 1,5] 1,5

Να επιλυθεί το πρόβλημα αρχικών τιμών

$$(1 - x^2) y'' - 2 x y' + 12 y = 0; \; y(0) = 1, \; y'(0) = -1.$$

<u>ΚΑΛΗ</u> <u>ΕΠΙΤΥΧΙΑ</u>