ΑΝΑΛΥΣΗ ΙΙ (Τμ. ΦΥΣΙΚΩΝ, Οκτ. 97)

Θέματα (από τα 5 θα γράψετε τα 4)

1. α) Να μελετηθεί ως προς την ύπαρξη κατευθυνόμενης παραγώγου $\partial_{\vec{a}} f(0,0)$, $\vec{a}=(a_1,a_2)$, $\|\vec{a}\|=1$ και διαφορικού $df(0,0)$ η συνάρτηση $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^2y}{x^4+y^2}, & (x,y)\neq(0,0)\\ 0, & (x,y)=(0,0)\end{cases}$

β) Αν η $f(u)$ είναι διαφορίσιμη και $g(x,y)=xy+yf\left(\frac{y}{x}\right)$ να αποδειχθεί ότι

$$x\frac{\partial g}{\partial x}(x,y)+y\frac{\partial g}{\partial y}(x,y)=g(x,y)+xy$$

2. α) $V(r,\varphi)=f(r\cos\varphi, r\sin\varphi)$, $x=r\cos\varphi$, $y=r\sin\varphi$, f C^2-τάξης.

Αποδείξτε ότι

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=\frac{\partial^2 V}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 V}{\partial \varphi^2}$$

β) Αν η συνάρτηση V δεν εξαρτάται από την φ και $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=0$ να βρεθεί η V με $V(1)=V(e)=1$.

α) Να υπολογισθεί το ολοκλήρωμα $\int_\Gamma \frac{-(y-2)}{x^2+(y-2)^2}dx+\frac{x}{x^2+(y-2)^2}dy$ όπου Γ η περίμετρος ενός τριγώνου στον $\mathbb{R}^2$.

β) Να υπολογισθεί ο όγκος του στερεού που φράσσεται από το παραβολοειδές $x^2+y^2=5z$, το xy-επίπεδο και τον κύλινδρο $x^2+y^2=9$.

α) Να υπολογισθεί το ολοκλήρωμα $\int_\Gamma x^2dx-yz\,dy+xy\,dz$ όπου Γ η τομή του κυλίνδρου $x^2+y^2=1$ και του επιπέδου $x+y+z=1$

β) Έστω η επιφάνεια $S:\ z^2-\left(\frac{x}{\alpha}\right)^2-\left(\frac{y}{\beta}\right)^2=0$, $z\geq 0$. Να προσδιορισθούν τα α,β ώστε η κάθετη ευθεία στην S στο σημείο (x_0,y_0,z_0) να τέμνει τον άξονα των z, για κάθε σημείο (x_0,y_0,z_0).

α) Να επαληθευτεί το Θ. Gauss για τη σφαίρα ακτίνας $\alpha>0$ και το διανυσματικό πεδίο $\vec{F}(x,y,z)=(x,y,z)$.

β) Να βρεθεί το εμβαδό της παραγόμενης επιφάνειας από την περιστροφή του γραφήματος της $y=\varphi(x)$, $x\in[\alpha,\beta]$, $\varphi\geq 0$ γύρω από τον x-άξονα.