ΜΗΜΑ ΦΥΣΙΚΗΣ

ΟΝΟΜ.: ______________

Α.Μ.: ______________

ΠΤΥΧΙΑΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ (17.3.2000)

ΑΝΑΛΥΣΗ ΙΙ

Θ1: (α) Να εξετάσετε αν υπάρχουν τα όρια: (i) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{x^2+y^2}$, (ii) $\lim\limits_{(x,y)\to(2,0)} x\,\eta\mu\frac{1}{y}$.

(β) Δίνεται η συνάρτηση $f(x,y)=3xy-x^2$, $(x,y)\in\mathbb{R}^2$. Να υπολογίσετε την κατευθυνόμενη παράγωγο $D_{\vec{a}}f(1,2)$, όπου $\vec{a}=(a_1,a_2)\in\mathbb{R}^2$ με $a_1^2+a_2^2=1$. Από την $D_{\vec{a}}f(1,2)$, με κατάλληλη επιλογή των a_1, a_2, να βρείτε τις μερικές παραγώγους $\frac{\partial f(1,2)}{\partial x}$, $\frac{\partial f(1,2)}{\partial y}$.

Θ2: (α) Να βρείτε την εξίσωση του εφαπτόμενου επιπέδου της επιφάνειας με εξίσωση $z^2=x^2+y^2$, στο σημείο της $(3,4,5)$.

(β) Έστω $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ διαφορίσιμη συνάρτηση. Αν $h(u,v,w)=-v+f(u^2+v^2, we^{-u})$, να αποδείξετε ότι $v\frac{\partial h}{\partial u}-u\frac{\partial h}{\partial v}+vw\frac{\partial h}{\partial w}=u$.

Θ3: (α) Να βρείτε τα σημεία τοπικών ακροτάτων της συνάρτησης $f(x,y,z)=x^3+y^2+z^2-3x$, $(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$.

(β) Χρησιμοποιώντας διπλό ολοκλήρωμα, να υπολογίσετε τον όγκο του τετραέδρου B, που ορίζεται από τα επίπεδα $x=0$, $y=0$, $z=0$ και $\alpha x+\beta y+\gamma z=1$, $\alpha>0$, $\beta>0$, $\gamma>0$.

Θ4: Να υπολογίσετε τα ολοκληρώματα:

(α) $I=\iint\limits_D \frac{dx\,dy}{\sqrt{x^2+y^2}}$, όπου $D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2:\ x^2+y^2\le 2x,\ y\ge 0\}$

(β) $I=\iiint\limits_B z(x^2+y^2)\,dx\,dy\,dz$, όπου $B=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3:\ x^2+y^2+z^2\le 4\alpha^2,\ x^2+y^2\le\alpha^2,\ \alpha>0,\ x,y,z\ge 0\}$

Θ5: Να υπολογίσετε τα ολοκληρώματα:

(α) $I=\int_{\partial G}(xy-x^2)\,dx+x^2y\,dy$, όπου G είναι το τρίγωνο με κορυφές τα σημεία $(0,0)$, $(0,1)$, $(1,1)$.

(β) $I=\int_\Gamma (xy+z^2)\,ds$, όπου Γ είναι η καμπύλη $\vec{r}(t)=(\eta\mu t, \sigma\upsilon\nu t, t)$, $t\in[0,2\pi]$.

ΣΗΜΕΙΩΣΗ: Να απαντήσετε σε 4 ΘΕΜΑΤΑ