

Ανάλυση II Πτυχιακή Εξέταση Μάρτιος '97

1) α) Υπολογίστε τα όρια, αν υπάρχουν

$$\lim_{(x,\psi) \rightarrow (0,1)} \psi \ln \frac{1}{x}, \quad \lim_{(x,\psi,z) \rightarrow (0,0,0)} \frac{x^2\psi - z^3}{x^2 + \psi^2 + z^2}$$

β) Υπολογίστε την μέση θερμοκρασία κατά μήκος της κομψής $\Gamma = \Gamma(\vec{v} = \vec{v}(t) = (t - \cos t, 1 - \sin t), t \in [0, \frac{\pi}{2}])$ η οποία θεωρείται ως αγωγός θερμότητας με θερμοκρασία $f(x, \psi) = x$

2) α) Επαληθεύστε το θεωρ. Green για το πεδίο $\vec{F}(x, \psi) = (\frac{2}{3}x\psi^3 - x^2\psi, x^2\psi^2)$ και το χωρίο D που είναι το τρίγωνο με κορυφές $(0,0), (1,0), (1,1)$

β) Υπολογίστε τα $\frac{\partial f(0,0)}{\partial x}, \frac{\partial f(0,0)}{\partial \psi}, \nabla f(0,0)$ και $df(0,0)$ για

$$f(x, \psi) = \begin{cases} \frac{x\psi^2}{\sqrt{x^2 + \psi^2}}, & (x, \psi) \neq (0,0) \\ 0, & (x, \psi) = (0,0) \end{cases}$$

3) α) Υπολογίστε το $\iint_D \frac{x}{\sqrt{x^2 + \psi^2}} dx d\psi$ όπου D είναι το μέρος ως επιπέδου

που περικλείεται από τις ευθείες $x=0, \psi=1, \psi=x$

β) Υπολογίστε τα ακρότατα της συνάρτησης

$$f(x, \psi) = \frac{1}{2}x\psi + (47 - x - \psi)\left(\frac{x}{3} + \frac{\psi}{4}\right)$$

4) α) Αν $u = \log(x^2 + \psi^2)$ και $x = p\theta, \psi = \frac{p}{\theta}$ να υπολογίσετε τα

$$\frac{\partial u}{\partial p}, \frac{\partial u}{\partial \theta} \text{ και } du$$

β) Αν f, \vec{F} πεδία C^2 -τάξης να αποδείξετε ότι:

$$\text{curl}(\nabla f) = \vec{0} \text{ και } \text{div}(\text{curl } \vec{F}) = 0$$

5) α) Υπολογίστε τον όγκο $V(B)$ του στερεού B το οποίο εφίπεται υπό της επιφάνειας $x^2 + \psi^2 + z^2 = z$ και άνω του κώνου $z^2 = x^2 + \psi^2$

β) Να υπολογιστεί το εμβαδό $\mu(A(D))$ του συνόλου D το οποίο εφίπεται μεταξύ των διαγραμμάτων των καμπωτών

$$\psi = \frac{x^2}{4} \text{ και } x - 2\psi + 4 = 0 \text{ με επικαμπύλιο ολοκλήρωμα.}$$