ΑΝΑΛΥΣΗ ΙΙ, Τμ. ΦΥΣΙΚΩΝ, ΙΟΥΝΙΟΣ 97.

Να βρεθούν η κατευθυνόμενη παράγωγος ως προς την κατεύθυνση $\vec{a}$, $\|\vec{a}\|=1$ αι το διαφορικό της συνάρτησης $f(x,y) = e^{x+y}$ στο $(0,0)$. (βαθμ. 1)

2. Να βρεθούν τα όρια $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{e^{x+y}-1-x-y}{|x|+|y|}$, $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^3+y^3}{x+y}$ (βαθμ. 1)

. Έστω f συνάρτηση C^2-τάξης ορισμένη σε ανοικτό και κυρτό υποσύνολο του $\mathbb{R}^2$ με

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - (a+\beta)\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + a.\beta \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0 \quad , a,\beta \in \mathbb{R},\ a \neq \beta.$$

(βαθμ. 2)

Θέτουμε $u = y + ax$, $v = y + \beta x$. Πως μετασχηματίζεται η παραπάνω σχέση; Αποδείξτε ότι $f(x,y) = g(y+ax) + h(y+\beta x)$ για g, h κατάλληλες συναρτήσεις.

: Δίδεται η επιφάνεια $S:\ 1 - z = x^2 + y^2$, $x, y > 0$. Να βρεθεί το εφαπτόμενο επίπεδο στη θέση $(x_0, y_0, z_0) \in S$ και οι τομές του επιπέδου αυτού με τους άξονε Να βρεθεί το σημείο (x_0, y_0, z_0) για το οποίο ο όγκος της πυραμίδας που σχηματ εται με το $(0,0,0)$ παίρνει ελάχιστη τιμή. (βαθμ. 2)

Υπολογίστε το ολοκλήρωμα $\int_\Gamma x^2 dx - yz\, dy + xy\, dz$ όπου Γ η τομή του κυλίνδρου $x^2+y^2=1$ και του επιπέδου $x+y+z=1$. (βαθμ. 1)

. Αν $\varphi(x,y,z)$, $\psi(x,y,z)$ C^2-τάξεως συναρτήσεις και το διανυσματικό πεδίο $\varphi \nabla\psi$ είναι συντηρητικό αποδείξτε ότι $\nabla\varphi \times \nabla\psi = \vec{0}$. (βαθμ. 1)

. Υπολογίστε το εμβαδό του τμήματος της σφαίρας $x^2+y^2+z^2=a^2$ που βρίσκεται μεταξύ των επιπέδων $z=\beta$, $z=\gamma$ όπου $-a \le \beta < \gamma \le a$. (βαθμ. 1,3)

. Αποδείξτε ότι $\nabla^2 r^n = n(n+1) r^{n-2}$ και $\nabla \ln r = \dfrac{\vec{r}}{r^2}$ (βαθμ. 0,7)

! Τι γνωρίζετε για την δυνατότητα ύπαρξης λύσης ενός συστήματος της μορφής

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x} = P, \quad \frac{\partial\varphi}{\partial y} = Q, \quad \frac{\partial\varphi}{\partial z} = R$$

στο $\mathbb{R}^3$; Εφαρμόστε αυτό και στη συνέχεια λύσ το σύστημα για $P = y$, $Q = x + e^z$ και $R = ye^z$ (βαθμ. 1)

10. Επαληθεύστε τον τύπο του Green για $\vec{F}(x,y) = \left(\dfrac{-y}{x^2+y^2}, \dfrac{x}{x^2+y^2}\right)$ και $G = \{(x,y):\ 1 \le x^2+y^2 \le 2\}$ (βαθμ. 1,5).