

Θ.1 α) Εξετάστε ως προς τη συνέχεια τη συνάρτηση

$$f(x, \psi) = \begin{cases} \frac{x\psi}{x^2+\psi^2} & , (x, \psi) \neq (0, 0) \\ 0 & , (x, \psi) = (0, 0) \end{cases}$$

β) Εξετάστε ως προς την ύπαρξη του διαφορικού στο σημείο $(0, 0)$ τη συνάρτηση

$$f(x, \psi) = \begin{cases} \frac{\eta\mu(x\psi)}{x} & , x \neq 0 \\ 0 & , x = 0 \end{cases}$$

Θ.2 α) Αν $w = f(u, v)$, $u = x + \psi$, $v = x - \psi$ δείξτε ότι

$$\frac{\partial w}{\partial x} \cdot \frac{\partial w}{\partial \psi} = \left(\frac{\partial f}{\partial u}\right)^2 - \left(\frac{\partial f}{\partial v}\right)^2$$

β) i) Βρείτε την παράγωγο της συνάρτησης $f(x, \psi) = x^2 + \psi^2$ στο σημείο $P_0(1, 1)$ κατά την διεύθυνση του μοναδιαίου διανύσματος $\vec{u} = u_1 \vec{e}_1 + u_2 \vec{e}_2$. ii) κατά ποια διεύθυνση η f έχει το μέγιστο ρυθμό αύξησης στο σημείο $P_0(1, 1)$. Ποια είναι η παράγωγος της f κατά την διεύθυνση αυτή; iii) Βρείτε την διεύθυνση κατά την οποία η παράγωγος της f στο $(1, 1)$ είναι μηδέν.

Θ.3 α) Βρείτε την μέγιστη τιμή του γινομένου των θετικών αριθμών x, ψ, z αν $x + \psi + z^2 = 16$. β) Υπολογίστε το ολοκλήρωμα

$$\int_0^1 \int_{\sqrt{x}}^1 \sqrt{1+\psi^3} d\psi dx$$

Θ.4 α) Αν $D = \{(x, \psi) \in \mathbb{R}^2 : a^2 \leq x^2 + \psi^2 \leq b^2, \psi > 0\}$ υπολογίστε το ολοκλήρωμα

$$\iint_D \frac{x+\psi}{x^2+\psi^2} dx d\psi$$

εΙ(β-α)

β) Βρείτε τον όγκο του στερεού που περιχρείται από τις επιφάνειες $x^2 + \psi^2 = az$, $x^2 + \psi^2 = 2ax$, $z = 0$ ($a > 0$).

Θ.5 α) Υπολογίστε το επικαμπύσιο ολοκλήρωμα $\int_{\Gamma} \vec{F} \cdot d\vec{r}$ όπου $\vec{F}(x, \psi, z) = (2\psi, 3x, x+\psi)$ και $\Gamma : \vec{r} = \vec{r}(t) = (\cos t, \eta\mu t, t)$, $t \in [0, 2\pi]$

β) Επαληθεύσατε τον τύπο του Green για το διανυσματικό πεδίο $\vec{F}(x, \psi) = (x+\psi, \psi)$ του \mathbb{R}^2 στο $D = \{(x, \psi) : x^2 + \psi^2 \leq a^2, a > 0\}$.

ΣΗΜΕΙΩΣΗ: Απαντήστε σε 4 (τέσσερα) θέματα.