ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ
ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ
ΤΟΜΕΑΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗΣ ΑΝΑΛΥΣΗΣ
ΚΑΘΗΓΗΤΗΣ ΣΩΤΗΡΗΣ Κ. ΝΤΟΥΓΙΑΣ

απειροστικός λογισμός 1

Εξετάσεις Ιανουαρίου 2000

1. α) Να δώσετε τους ορισμούς του σημείου συσσωρεύσεως ενός συνόλου $A \subseteq \mathbb{R}$ και του σημείου συσσωρεύσεως μιας ακολουθίας α_ν, $\nu \in \mathbb{N}$. Στη συνέχεια να αποδείξετε ότι ένα σημείο $\xi \in \mathbb{R}$ είναι σημείο συσσωρεύσεως ενός συνόλου $A \subseteq \mathbb{R}$, αν και μόνον αν, υπάρχει ακολουθία x_ν, $\nu \in \mathbb{N}$ με $x_\nu \in A - \{\xi\}$ τέτοια ώστε $\lim x_\nu = \xi$.

β) Αφού βρείτε την ακολουθία των μερικών αθροισμάτων της σειράς

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} \alpha_\nu = 1 + \alpha + \beta + \alpha^2 + \beta^2 + \alpha^3 + \beta^3 + \cdots, \qquad \alpha, \beta > 0$$

στην συνέχεια να την εξετάσετε ως προς την σύγκλιση.

γ) Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x + \cos x - k$, $x \in \mathbb{R}$, $k \in \mathbb{R}$. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x) = 0$ δεν έχει θετική ρίζα στο $\mathbb{R}$ αν $k < 1$ και έχει ακριβώς μια θετική ρίζα μικρότερη του $2k$, αν $k > 1$.

$x + \cos x > 1$

2. α) Να αποδείξετε ότι κάθε ακολουθία του Cauchy συγκλίνει.

β) Μια ακολουθία α_ν, $\nu \in \mathbb{N}$ ικανοποιεί την σχέση $|\alpha_{\nu+1} - \alpha_\nu| \le \dfrac{1}{\nu^2}$, $\forall \nu \in \mathbb{N}$. Να αποδείξετε ότι συγκλίνει.

$-x < 0$

γ) Να αποδείξετε ότι: $\operatorname{Arcsinh} x < x$, $\forall x > 0$.

3. α) Να αποδείξετε ότι για κάθε φυσικό ν και κάθε πραγματικό αριθμό $\alpha < 0$, υπάρχει ακριβώς ένας πραγματικός αριθμός $\beta < 0$, τέτοιος ώστε $\beta^{2\nu-1} = \alpha$.

β) Να αποδείξετε ότι μια συνάρτηση f δεν είναι ομοιόμορφα συνεχής σε ένα διάστημα Δ, αν υπάρχουν $\epsilon > 0$ και δυο ακολουθίες x_ν, $\nu \in \mathbb{N}$ και y_ν, $\nu \in \mathbb{N}$ από το Δ, τέτοιες ώστε: $\lim(x_\nu - y_\nu) = 0$ και $|f(x_\nu) - f(y_\nu)| \ge \epsilon > 0$.

γ) Με την βοήθεια του $\epsilon - \delta$ ορισμού να αποδείξετε ότι: $\displaystyle\lim_{x \to -1} \frac{x}{3x+1} = \frac{1}{2}$.

4. α) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $f(x) = \log x$, $x \in (0, 1)$ είναι συνεχής, αλλά όχι ομοιόμορφα συνεχής.

β) Για την συνάρτηση $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x}}$, $x \in (0, \infty)$ να γραφεί ο τύπος του Taylor στο σημείο $x_0 = 1$ με υπόλοιπο εκφρασμένο κατά Cauchy.

γ) Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \operatorname{Arctg} x$, $x \in \mathbb{R}$. Να αποδείξετε ότι υπάρχει σταθερή $k < 1$, η οποία και να βρεθεί, τέτοια ώστε: $|f''(x)| \le k < 1$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

5. α) Έστω $f : (\alpha, \beta) \to \mathbb{R}$ μια αύξουσα συνάρτηση. Να αποδείξετε ότι για κάθε $x_0 \in (\alpha, \beta)$ τα όρια $\lim_{x \to x_0+} f(x)$ και $\lim_{x \to x_0-} f(x)$ υπάρχουν.

β) Έστω $f : [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}$ μια παραγωγίσιμη συνάρτηση με $f'(\alpha) < 0 < f'(\beta)$. Να αποδείξετε ότι η f έχει κρίσιμο σημείο στο (α, β).

γ) Να βρείτε τα τοπικά ακρότατα της συνάρτησης $f(x) = \begin{cases} x^2, & x \le 1 \\ 2 - x, & x > 1 \end{cases}$ και το supremum της $g(x) = 1 - |2x - 1|$, $0 < x < 1$.

ΖΗΤΟΥΝΤΑΙ ΤΕΣΣΕΡΑ (4) (ΟΛΟΚΛΗΡΑ) ΘΕΜΑΤΑ
Διάρκεια εξέτασης 3 ώρες

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ