απειροστικός λογισμός 1

Εξετάσεις Ιανουαρίου 1997

1. α) Να δώσετε τους ορισμούς του σημείου συσσωρεύσεως ενός συνόλου $A \subseteq \mathbb{R}$ και μιας ακολουθίας α_ν, $\nu \in \mathbb{N}$. Στη συνέχεια να αποδείξετε ότι αν ένα σημείο $\xi \in \mathbb{R}$ είναι σημείο συσσωρεύσεως ενός συνόλου $A \subseteq \mathbb{R}$ τότε υπάρχει ακολουθία x_ν, $\nu \in \mathbb{N}$ με $x_\nu \in A - \{\xi\}$ τέτοια ώστε $\lim x_\nu = \xi$. **[0.8]**

β) Έστω $\xi \in \mathbb{R}$ σημείο συσσωρεύσεως του πεδίου ορισμού $\Delta(f)$ μιας συνάρτησης f. Αν για κάθε ακολουθία $x_\nu \in \Delta(f) - \{\xi\}$ που συγκλίνει στο ξ η αντίστοιχη ακολουθία $f(x_\nu)$, $\nu \in \mathbb{N}$ συγκλίνει, τότε να αποδείξετε ότι συγκλίνει σε ένα και μοναδικό όριο. **[1.2]**

2. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{1}{2x-1}$, $x \neq \frac{1}{2}$.

α) Να αποδείξετε, με την βοήθεια του $\epsilon - \delta$ ορισμού ότι $\lim_{x \to -1} f(x) = -\frac{1}{3}$.

[1]

β) Να αποδείξετε ότι η σειρά $\sum_{\nu=1}^{\infty} f(\nu)$ απειρίζεται θετικά, αποδεικνύοντας ότι η ακολουθία των μερικών της αθροισμάτων, δεν είναι ακολουθία του Cauchy.

[0.8]

γ) Να γραφεί ο τύπος του Taylor για την f στο σημείο $x_0 = 1$, με υπόλοιπο εκφρασμένο κατά Cauchy. **[0.7]**

3. α) Να αποδείξετε ότι $\lim \sqrt[\nu]{\nu} = 1$. **[0.8]**

β) Να εξετάσετε ως προς τη μονοτονία την συνάρτηση $f(x) = x^{1/x}$, $x > 0$.

[0.7]

γ) Να εξετάσετε ως προς τη σύγκλιση τη σειρά $\sum_{\nu=1}^{\infty} (-1)^{\nu+1} \left(\nu^{1/\nu} - 1\right)$. **[0.5]**

4. Δίνεται η συνάρτηση

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{|x-1|}, & x \neq 1 \\ 24, & x = 1 \end{cases}$$

Να αποδείξετε ότι δεν ικανοποιεί τις υποθέσεις του Θεωρήματος της Μέσης Τιμής στο διάστημα $[0, \beta]$, $\beta \geq 2$ αλλά ικανοποιεί το συμπέρασμά του αν $\beta > 2 + \sqrt{2}$.

[1.5]

5. Έστω $f : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ μια συνεχής συνάρτηση. Αν η f είναι ομοιόμορφα συνεχής στο $[\alpha, \infty)$ για κάποιο $\alpha > 0$, τότε να αποδείξετε ότι η f είναι ομοιόμορφα συνεχής στο $[0, \infty)$. Να κάνετε εφαρμογή στην συνάρτηση $f(x) = \sqrt{x}$, $x \in [0, \infty)$.

[1.5]

6. Να αποδείξετε ότι:

$$|\sinh x| \geq |x|, \forall x \in \mathbb{R} \quad \text{και} \quad \frac{d^2}{dx^2}(x \operatorname{Arctgh} x) > 0, \forall x \in (-1, 1).$$

[1]

Διάρκεια εξέτασης 3 ώρες