ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ
ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ
ΤΟΜΕΑΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗΣ ΑΝΑΛΥΣΗΣ
Αναπληρωτής Καθηγητής: Σ. Κ. ΝΤΟΥΓΙΑΣ

# απειροστικός λογισμός 1

**Εξετάσεις Ιανουαρίου 1998**

**1.** α) Έστω $\alpha_\nu, \nu \in I\!N$ μια αύξουσα ακολουθία και $\beta_\nu, \nu \in I\!N$ μια φθίνουσα ακολουθία πραγματικών αριθμών τέτοιες ώστε: $\alpha_\nu < \beta_\nu, \forall \nu \in I\!N$. Να αποδείξετε ότι συγκλίνουν και ότι ισχύει $lim\alpha_\nu \leq lim\beta_\nu$. **[0.8]**

β) Να αποδείξετε ότι η ακολουθία $\alpha_\nu, \nu \in I\!N$ με

$$\alpha_1 > \lambda > 0 \quad \text{και} \quad \alpha_{\nu+1} = \frac{\alpha_\nu^2 + \lambda^2}{2\alpha_\nu}$$

συγκλίνει. Ποιό είναι το όριό της; **[1.2]**

**2.** Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = log|3x - 2|,\ x \neq \frac{2}{3}$. Να αποδείξετε ότι:
α) $\lim_{x\to-1} \frac{1}{3} f'(x) = -\frac{1}{5}$, με την βοήθεια του $\epsilon - \delta$ ορισμού. **[0.8]**
β) η συνάρτηση $g(x) = xf'(x)$ είναι ομοιόμορφα συνεχής στο διάστημα $(-\infty, 0)$, αλλά δεν είναι στο διάστημα $(\frac{2}{3}, +\infty)$. **[1.2]**

**3.** Να αποδείξετε ότι:
α) Αν η $f$ είναι αύξουσα και η $g$ φθίνουσα, τότε η $f \circ g$ είναι φθίνουσα. **[0.5]**
β) Η συνάρτηση $f(x) = \frac{1-cos x}{x}$ είναι αύξουσα στο διάστημα $(0, \frac{\pi}{2})$. **[0.7]**
γ) Η σειρά $\sum_{\nu=1}^{\infty}(-1)^\nu \nu \left\{1 - cos\frac{1}{\nu}\right\}$ συγκλίνει. **[0.8]**

**4.** α) Έστω $f : [\alpha, \beta] \to I\!R$ μια συνάρτηση δυο φορές παραγωγίσιμη με $f''(x) < 0, \forall x \in [\alpha, \beta]$. Να αποδείξετε ότι το γράφημά της βρίσκεται κάτω από την εφαπτομένη της σε οποιοδήποτε σημείο του γραφήματός της. **[0.8]**
β) Έστω $f : [\alpha, \beta] \to I\!R$ μια συνεχής συνάρτηση με $f(x) > 0, \forall x \in [\alpha, \beta]$. Να αποδείξετε ότι η $f$ έχει infimum θετικό και ότι $sup\left\{\frac{1}{f(x)} : x \in [\alpha, \beta]\right\} = \frac{1}{inf f(x)}$. **[1.2]**

**5.** α) Να εξετάσετε αν υπάρχει το $\lim_{x\to-\infty} sin(x+1)$. **[0.5]**
β) Έστω $f : [\alpha, \beta] \to I\!R$ μια παραγωγίσιμη συνάρτηση με $f'(\alpha) > 0,\ f'(\beta) < 0$. Να αποδείξετε ότι η $f$ έχει κρίσιμο σημείο στο $[\alpha, \beta]$. **[0.7]**
γ) Να αποδείξετε ότι η ακολουθία των μερικών αθροισμάτων της σειράς $\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{\nu^2}$ είναι ακολουθία του Cauchy, χρησιμοποιώντας τον ορισμό. **[0.8]**

**6.** Να διατυπώσετε και να αποδείξετε ένα από τα παρακάτω Θεωρήματα:
α) Κριτήριο του Leibnitz για εναλλασσόμενες σειρές.
β) Θεώρημα ορίου σύνθεσης συναρτήσεων.
γ) Θεώρημα συνέχειας αντίστροφης συνάρτησης.
δ) Θεώρημα παραγώγισης σύνθεσης συναρτήσεων.
ε) Κανόνας του L' Hospital για την απροσδιόριστη μορφή $\frac{\infty}{\infty}$.
στ) Τύπος του Taylor με υπόλοιπο εκφρασμένο κατά Cauchy. **[2]**

**Διάρκεια εξέτασης 3 ώρες** **ΖΗΤΟΥΝΤΑΙ 5 (ΠΕΝΤΕ) ΘΕΜΑΤΑ**