ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ
ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ
ΤΟΜΕΑΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗΣ ΑΝΑΛΥΣΗΣ
Καθηγητης Σωτηριης Κ. Ντουγιας

απειροστικός λογισμός 1

Εξετάσεις Ιανουαρίου 1999

1.

α) Έστω $A \subseteq \mathbb{R}$ ένα μη κενό και φραγμένο σύνολο. Αν $B = \{\lambda x : x \in A, \ \lambda < 0\}$ να αποδείξετε ότι $\inf B = \lambda \cdot \sup A$. **[0.5]** 0,5

β) Να υπολογίσετε τα όρια: i) $\lim \sqrt[\nu]{\left(\frac{3}{5}\right)^\nu + \left(\frac{5}{6}\right)^\nu}$ και ii) $\lim \sqrt[\nu]{2^{10} + k^\nu}$, $k \in \mathbb{R}^+$. **[0.8]** 0,4

γ) Να εξετάσετε ως προς τη σύγκλιση τη σειρά $\sum_{\nu=1}^{\infty} \alpha_\nu = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots$ **[0.7]** 0,7

2.

α) Έστω α_ν, $\nu \in \mathbb{N}$ μια ακολουθία πραγματικών αριθμών, τέτοια ώστε:

$$|\alpha_{\nu+2} - \alpha_{\nu+1}| \leq \frac{1}{3}|\alpha_{\nu+1} - \alpha_\nu|, \quad \forall \nu \in \mathbb{N}.$$

Να αποδείξετε ότι η α_ν, $\nu \in \mathbb{N}$ είναι ακολουθία του Cauchy. **[1]** 1

β) Να βρεθούν τα ακρότατα (τοπικά και ολικά) της συνάρτησης $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με

$$f(x) = \begin{cases} 2x - 1, & x \leq 1 \\ (x-2)^2, & x > 1 \end{cases}$$ **[1]** 0,5

3.

α) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ με

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}x + x \cdot \sqrt{x} \cdot \cos\frac{1}{x}, & 0 < x \leq 1 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$ 1

είναι παραγωγίσιμη στο $[0, 1]$, με παράγωγο ασυνεχή και μη φραγμένη. **[1.3]**

β) Έστω $f : [\alpha, \beta) \to \mathbb{R}$ μια ομοιόμορφα συνεχής συνάρτηση. Να αποδείξετε ότι το $\lim_{x \to \beta-} f(x)$ υπάρχει. **[0.7]**

4.

α) Έστω $f(x) = \frac{x^2}{x-1}$, $x \neq 1$. Με την βοήθεια του $\epsilon - \delta$ ορισμού να αποδείξετε ότι:

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty, \qquad \lim_{x \to 1/2} f(x) = -\frac{1}{2}.$$ **[1]** 1

β) Δίνεται η συνάρτηση

$$f(x) = Arcth\left(\frac{1-x}{1+x}\right) + |x|^x + cth\,(2^x - 8).$$

Να βρεθεί η f' καθώς και τα πεδία ορισμού των f και f'. **[1]** 1

5.

α) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $f(x) = \log x$, $x > 0$ είναι συνεχής. **[1]**

β) Έστω $g(x) = \frac{1}{x} + \log x$, $x \in [e, e^2]$. Να αποδείξετε ότι υπάρχει μοναδικό $\xi \in [e, e^2]$ τέτοιο ώστε: $g(\xi) = \frac{3}{2}$. **[1]**

6.

Έστω $f : [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}$ μια αμφιμονοσήμαντη και συνεχής συνάρτηση. Να αποδείξετε ότι:

α) η f είναι γνήσια μονότονη. **[0.8]**

β) η αντίστροφη f^{-1} είναι συνεχής στο $f([\alpha, \beta])$. **[1.2]**

ΖΗΤΟΥΝΤΑΙ ΠΕΝΤΕ (5) ΘΕΜΑΤΑ

Διάρκεια εξέτασης 3 ώρες

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ