ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ
ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ
ΤΟΜΕΑΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗΣ ΑΝΑΛΥΣΗΣ
ΚΑΘΗΓΗΤΗΣ ΣΩΤΗΡΗΣ Κ. ΝΤΟΥΓΙΑΣ

απειροστικός λογισμός 1

Εξετάσεις Φεβρουαρίου 2001

1. α) Έστω $x_\nu,\ \nu \in \mathbb{N}$ μια φραγμένη ακολουθία πραγματικών αριθμών τέτοια ώστε $x_\nu \geq x_{\nu+1},\ \forall \nu \in \mathbb{N}$. Να αποδείξετε ότι $inf\{x_\nu : \nu \in \mathbb{N}\} = lim x_\nu$. **(1)**

β) Να αποδείξετε ότι η ακολουθία $x_\nu,\ \nu \in \mathbb{N}$ με $x_1 = 1,\ x_2 = 2$ και $2x_{\nu+2} = x_{\nu+1} + x_\nu,\ \nu \in \mathbb{N}$ συγκλίνει. **(1.5)**

2. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = log|2x-1|,\ x \neq \frac{1}{2}$. Να αποδείξετε ότι:

α) $\lim\limits_{x \to 1/4} f'(x) = -4$ (με την βοήθεια του $\epsilon - \delta$ ορισμού). **(0.8)**

β) οι f και f' δεν είναι ομοιόμορφα συνεχείς στο $(0, \frac{1}{2})$. **(1)**

γ) η σειρά $\sum\limits_{\nu=1}^{\infty} f'(\nu)$ απειρίζεται θετικά, αποδεικνύοντας ότι η ακολουθία των μερικών της αθροισμάτων, δεν είναι ακολουθία του Cauchy. **(0.7)**

3. α) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση

$$f(x) = \begin{cases} \frac{logx - log\alpha}{x-\alpha}, & 0 < x < \alpha \\ \frac{1}{\alpha}, & x = \alpha \end{cases}$$

είναι γνησίως φθίνουσα στο πεδίο ορισμού της, με συνεχή πρώτη παράγωγο. **(1.5)**

β) Δίνεται η συνάρτηση

$$f(x) = \begin{cases} x^3, & x < 1 \\ (x-2)^2, & x \geq 1 \end{cases}$$

Να βρεθούν τα τοπικά ακρότατα της f στο $\mathbb{R}$ και τα ολικά στο διάστημα $[-1, 3]$. **(1)**

4. α) Να βρείτε το $sup\{f''(x) : x \in \mathbb{R}\}$ αν $f(x) = Arctgx,\ x \in \mathbb{R}$. **(0.7)**

β) Να αποδείξετε ότι η συναρτήση $f(x) = e^x,\ x \in \mathbb{R}$ είναι συνεχής. **(0.6)**

γ) Έστω $f : [-1, 1] \to \mathbb{R}$ μια συνάρτηση παραγωγίσιμη στο $[-1, 1]$ με $f'(-1) = 1$ και $f'(1) = -1$. Να αποδείξετε ότι η f έχει κρίσιμο σημείο στο $[-1, 1]$. **(0.6)**

δ) Να εξετάσετε αν υπάρχει το $\lim\limits_{x \to -\infty} cos(1 + \sqrt{|x|})$. **(0.6)**

Διάρκεια εξέτασης 3 ώρες

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ