ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ
ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ
ΤΟΜΕΑΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗΣ ΑΝΑΛΥΣΗΣ
ΚΑΘΗΓΗΤΗΣ ΣΩΤΗΡΗΣ Κ. ΝΤΟΥΓΙΑΣ

απειροστικός λογισμός 1

Εξετάσεις Σεπτεμβρίου 2000

1. α) Έστω $x_\nu, \nu \in \mathbb{N}$ και $y_\nu, \nu \in \mathbb{N}$ δυο ακολουθίες πραγματικών αριθμών με $y_\nu \neq 0, \forall \nu \in \mathbb{N}$ και $\lim x_\nu = \ell$, $\lim y_\nu = m$, $m \neq 0$. Να αποδείξετε ότι: $\lim \frac{x_\nu}{y_\nu} = \frac{\ell}{m}$.

β) Δίνεται η ακολουθία $\alpha_\nu, \nu \in \mathbb{N}$ με $\alpha_1 > 0$ και $\alpha_{\nu+1} = \frac{1}{3+\alpha_\nu}$.

i) Να αποδείξετε ότι υπάρχει σταθερή k, η οποία και να βρεθεί, τέτοια ώστε:

$$|\alpha_{\nu+2} - \alpha_{\nu+1}| \leq k|\alpha_{\nu+1} - \alpha_\nu|, \ \forall \nu \in \mathbb{N}.$$

ii) Να αποδείξετε ότι η $\alpha_\nu, \nu \in \mathbb{N}$ είναι ακολουθία του Cauchy.

2. α) Να εξετάσετε ως προς την σύγκλιση (απόλυτη ή υπό συνθήκη) τις σειρές:

$$i) \ \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{\nu^{\nu^2}}{(\nu!)^\nu}. \qquad ii) \ \sum_{\nu=2}^{\infty} (-1)^{\nu+1} \frac{1}{\log \sqrt{\nu}}$$

β) Να αποδείξετε ότι η σειρά

$$1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^3} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{5^5} + \dots$$

συγκλίνει, αλλά ούτε το κριτήριο πηλίκων του D' Alembert ούτε το κριτήριο της ν-οστής ρίζας του Cauchy εφαρμόζονται.

3. α) Να εξετάσετε αν υπάρχουν τα όρια i) $\lim_{x\to\infty} e^{\sin x}$ και ii) $\lim_{x\to 0}\left(\sin\frac{1}{x}\cos\frac{4}{x}\right)$.

β) Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{1}{3x-2}$, $x \neq \frac{2}{3}$.

i) Με την βοήθεια του $\epsilon - \delta$ ορισμού να αποδείξετε ότι: $\lim_{x\to -1} f(x) = -\frac{1}{5}$.

ii) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $g(x) = 3x\, f(x)$ δεν είναι ομοιόμορφα συνεχής στο διάστημα $\left(-\infty, \frac{2}{3}\right)$.

4. α) Έστω $f : [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}$ μια παραγωγίσιμη συνάρτηση. Να αποδείξετε ότι αν η f παίρνει την μέγιστη τιμή στο α τότε $f'(\alpha) \leq 0$, ενώ αν παίρνει την μέγιστη τιμή στο β τότε $f'(\beta) \geq 0$. Επίσης να αποδείξετε ότι αν ισχύει $f'(\beta) < 0 < f'(\alpha)$ τότε η f έχει κρίσιμο σημείο στο (α, β).

β) Έστω $\alpha \in \mathbb{R}^+$ και $S = \{x : 1 + \alpha x > 0\}$.

i) Αν $g(x) = \alpha x - (1+\alpha x)\log(1+\alpha x)$, $x \in S$ τότε να αποδείξετε ότι $g(x) < 0$, $\forall x \in S - \{0\}$.

ii) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\log(1+\alpha x)}{x}, & x \in S - \{0\} \\ \alpha, & x = 0 \end{cases}$$

είναι συνεχής και γνήσια φθίνουσα στο S. Να συμπεράνετε ότι για κάθε θετικό $x \in S$ είναι $f(x) < \alpha$, και ακόμη ότι για κάθε θετικό $x \in S$ ισχύει: $(1+\alpha x)^{1/x} < e^\alpha$.

Το ερώτημα α) βαθμολογείται με 1 μονάδα και το β) με 1.5 μονάδα.

Διάρκεια εξέτασης 3 ώρες

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ