ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ
ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ
ΤΟΜΕΑΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗΣ ΑΝΑΛΥΣΗΣ
Καθηγητής Σωτήρης Κ. Ντούγιας

απειροστικός λογισμός 1

Εξετάσεις Σεπτεμβρίου 1998

1. α) Έστω α_ν, $\nu \in \mathbb{N}$ μια φθίνουσα και φραγμένη ακολουθία πραγματικών αριθμών. Να αποδείξετε ότι $\lim \alpha_\nu = \inf\{\alpha_\nu, \nu \in \mathbb{N}\}$. [Μον. 1]

β) Να υπολογίσετε το $\inf\{\alpha_\nu, \nu \in \mathbb{N}\}$ αν η ακολουθία α_ν, $\nu \in \mathbb{N}$ ορίζεται ως εξής:

$$\alpha_1 = 3 \quad \text{και} \quad 2\alpha_\nu \cdot \alpha_{\nu+1} = \alpha_\nu^2 + 3. \quad \text{[Μον. 1.5]}$$

2. α) Δίνεται η σειρά $\sum_{\nu=1}^{\infty} \alpha_\nu$, με $\alpha_\nu \geq 0$, $\forall \nu \in \mathbb{N}$. Αν $\lim \sqrt[\nu]{\alpha_\nu} = k$, $0 \leq k < 1$, τότε να αποδείξετε ότι η σειρά συγκλίνει. [Μον. 1]

β) Να εξετάσετε ως προς τη σύγκλιση τις σειρές:

$$i) \ \sum_{\nu=1}^{\infty} (-1)^{\nu+1} \sin\frac{1}{\nu} \qquad ii) \ \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{(\nu!)^\nu}{\nu^{\nu^2}} \qquad iii) \ \sum_{\nu=2}^{\infty} \frac{\log \nu}{\nu^2} \quad \text{[Μον. 1.5]}$$

3. α) Έστω $f : [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}$ μια συνεχής συνάρτηση με $f(x) > 0$, $\forall x \in [\alpha, \beta]$. Να αποδείξετε ότι

$$\inf\left\{\frac{1}{f(x)} : x \in [\alpha, \beta]\right\} = \frac{1}{\sup f(x)}. \quad \text{[Μον. 1]}$$

β) Να αποδείξετε, με την βοήθεια του $\varepsilon - \delta$ ορισμού, ότι: $\lim_{x \to -1/2} \frac{1}{x} (\log|x|)' = 4$. [Μον. 1]

γ) Να εξετάσετε αν υπάρχει το όριο $\lim_{x \to \infty} \cos(1 + \sqrt{x})$. [Μον. 0.5]

4. α) Να αποδείξετε ότι οι συναρτήσεις $f(x) = \sqrt[3]{x}$, $x \in \mathbb{R}$ και $g(x) = e^x$, $x \in \mathbb{R}$ είναι συνεχείς. [Μον. 1]

β) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $f(x) = \frac{1}{x^2}$, $x \neq 0$ είναι ομοιόμορφα συνεχής στο διάστημα $(-\infty, -2)$, αλλά όχι και στο διάστημα $(-\infty, 0)$. [Μον. 1.5]

5. α) Έστω $f : I \to \mathbb{R}$, όπου I διάστημα και ξ εσωτερικό σημείο του I. Αν η f'' υπάρχει και είναι συνεχής σε μια περιοχή του ξ και $f'(\xi) = 0$, $f''(\xi) > 0$, τότε να αποδείξετε ότι η f παρουσιάζει τοπικό ελάχιστο στο ξ. [Μον. 1]

β) Έστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με

$$f(x) = \begin{cases} x - x^2 \cos\frac{\pi}{x^2}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

Να αποδείξετε ότι η f είναι παραγωγίσιμη $\forall x \in \mathbb{R}$ και ακόμα ότι η f' δεν είναι φραγμένη στην περιοχή του μηδενός. Εφαρμόζεται για την f' το Θεώρημα του Rolle στο διάστημα $[0, \frac{1}{2}]$; [Μον. 1.5]

Διάρκεια εξέτασης 3 ώρες

ΖΗΤΟΥΝΤΑΙ 4 ΘΕΜΑΤΑ

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ