ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ
ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ
ΤΟΜΕΑΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗΣ ΑΝΑΛΥΣΗΣ
ΚΑΘΗΓΗΤΗΣ ΣΩΤΗΡΗΣ Κ. ΝΤΟΥΓΙΑΣ

απειροστικός λογισμός 1

Εξετάσεις Σεπτεμβρίου 1999

1. α) Έστω $A \subseteq \mathbb{R}$ ένα μη κενό και φραγμένο σύνολο θετικών πραγματικών αριθμών. Αν $B = \{-x : x \in A\}$ και $\Gamma = \left\{\frac{1}{x} : x \in A\right\}$ να αποδείξετε ότι *i)* $\sup B = -\inf A$ και *ii)* $\inf \Gamma = \frac{1}{\sup A}$ $\boxed{1}$ 0,5

β) Να αποδείξετε ότι η ακολουθία των μερικών αθροισμάτων της σειράς $\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{\sin\nu}{\nu^2}$ είναι ακολουθία του Cauchy, χρησιμοποιώντας τον ορισμό. $\boxed{1}$

γ) Να υπολογίσετε το όριο: $\lim \sqrt[\nu]{3^5 + 2^\nu}$ $\boxed{0.5}$

2. α) Έστω $f(\alpha, \beta) \to \mathbb{R}$ μια αύξουσα και κάτω φραγμένη συνάρτηση. Να αποδείξετε ότι

$$\lim_{x \to \alpha+} f(x) = \inf\{f(x) : x \in (\alpha, \beta)\}. \quad \boxed{1}$$

β) Να αποδείξετε ότι: $\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1.$ $\boxed{0.7}$ 0,7

γ) Έστω $f(x) = \frac{\sin(x^2)}{x}$, $x \neq 0$. Να εξετάσετε αν υπάρχουν τα $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ και $\lim_{x\to+\infty} f'(x)$. $\boxed{0.8}$ 0,8

3. α) Έστω $f, g : [0, 1] \to [0, 1]$ δυο συνεχείς συναρτήσεις, με την f φθίνουσα και τέτοιες ώστε $f \circ g = g \circ f$. Να αποδείξετε ότι υπάρχει $\xi \in [0, 1]$ τέτοιο ώστε: $f(\xi) = \xi$ και $g(\xi) = \xi$. $\boxed{1}$

β) Να αποδείξετε ότι η $f(x) = e^x$, $x \in \mathbb{R}$ είναι συνεχής. $\boxed{0.8}$ 0,5

γ) Να αποδείξετε ότι η $g(x) = \frac{1}{x^2}$, $x < -1$ είναι ομοιόμορφα συνεχής. $\boxed{0.7}$ 0,6

4. α) Να αποδείξετε ότι

$$\frac{x}{x+1} \leq \log(1+x) \leq x, \quad x > -1. \quad \boxed{0.7}$$

β) Έστω

$$x_\nu = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{\nu - 1} - \log\nu, \quad y_\nu = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{\nu-1} + \frac{1}{\nu} - \log\nu, \quad \nu = 2, 3, \ldots$$

Να αποδείξετε ότι τα διαστήματα $[x_2, y_2]$, $[x_3, y_3]$, … αποτελούν κιβωτισμό κλειστών διαστημάτων του Cantor. $\boxed{1}$

γ) Να αποδείξετε ότι $e \cdot x \cdot |\log x| \leq 1$, $0 < x < 1$. $\boxed{0.8}$

5. α) Έστω $f : I \to \mathbb{R}$ μια συνάρτηση συνεχής στο διάστημα I, παραγωγίσιμη στο εσωτερικό του I και κυρτή. Να αποδείξετε ότι για οποιαδήποτε x και x_0 του I ισχύει

$$f(x) - f(x_0) \geq (x - x_0)f'(x_0) \quad \boxed{1}$$

β) Δίνεται η συνάρτηση

$$f(x) = \begin{cases} x + x^3 \sin^2\left(\frac{1}{x}\right), & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

Να εξετάσετε αν ισχύουν για την f' οι προϋποθέσεις του Θεωρήματος του Rolle. $\boxed{1}$ στο $[0, \frac{1}{n}]$

γ) Έστω $f(x) = \sin x$, $x \in \mathbb{R}$. Να βρεθεί η $f^{(\nu)}(0)$. $\boxed{0.5}$

ΖΗΤΟΥΝΤΑΙ ΤΕΣΣΕΡΑ (4) ΘΕΜΑΤΑ
Διάρκεια εξέτασης 3 ώρες

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ