Απειροστικός Λογισμός IV

16 - 1 - 2001

1. Έστω $D=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3;\ 2x^2+y^2-1\le z\le 3-2x^2-y^2\}$.

Να υπολογιστούν:

α. Ο όγκος $V(D)$.

β. Το ολοκλήρωμα $I=\iiint_D \frac{1}{\sqrt{6x^2+3y^2}}\,dx\,dy\,dz$.

2. Δίνεται η 2π-περιοδική συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με $f(x)=\begin{cases} e^x, & \text{αν } x\in(0,2\pi) \\ \kappa, & \text{αν } x=0 \end{cases}$.

α. Να υπολογιστεί το κ ώστε η f να αναπτύσσεται σε σειρά Fourier η οποία κ να βρεθεί.

β. Να βρεθεί το όριο της σειράς αυτής για $x_1=0$, $x_2=\pi^2$, $x_3=97\pi$ κ $x_4=2001\frac{\pi}{2}$.

γ. Είναι ομοιόμορφη η σύγκλιση της σειράς;

δ. Να δειχτεί ότι: $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{1+n^2}=\frac{\pi(e^{2\pi}+1)}{2(e^{2\pi}-1)}-\frac{1}{2}$.

3. Έστω S η επιφάνεια που δίνει το γράφημα της συναρτήσεως:

$$z=\sqrt{9-x^2-y^2},\ (x,y)\in A=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2;\ x^2+y^2\le 4\}.$$

Αν γ είναι το θετικά προσανατολισμένο σύνορο της S, να επαληθευτεί το θεώρημα του Stokes για την συνάρτηση $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ με $f(x,y,z)=(1-x^2,\ 3x,\ y)$.

4. Έστω $f_n(x)=\frac{n}{n^3+x^2}$, $x\in\mathbb{R}$. Να δειχθεί ότι: οι σειρές $\sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x)$ και $\sum_{n=1}^{+\infty} f_n'(x)$ συγκλίνουν κατά σημείο προς δύο συναρτήσεις f και g αντίστοιχα για τις οποίες ισχύουν:

α. Η f είναι παραγωγίσιμη, η g είναι συνεχής και $f'(x)=g(x)$, $x\in\mathbb{R}$.

β. $\int_{-\pi}^{\pi} x\, f(x)\,dx=\int_{-10}^{10} g(x)\,dx=0$.

5α. Αν γ είναι η θετικά προσανατολισμένη έλλειψη με ημιάξονες $a=2$ και $b=1$, να υπολογιστούν τα επικαμπύλια ολοκληρώματα:

$$I_1=\int_{\gamma}\left(x^5+\frac{y^3}{3}\right)dx-\left(\frac{x^3}{12}-y^3+x\right)dy \text{ και}$$

$$I_2=\oint_{\gamma}\left(7x^6y-\cos x^4-y\right)dx+\left(x^7-x-y^6\right)dy.$$

β. Να δειχθεί ότι, αν η σειρά συναρτήσεων $\sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x)$, $x\in S\subseteq\mathbb{R}$, συγκλίνει σχεδόν ομοιόμορφα, τότε η ακολουθία συναρτήσεων $f_n(x)$, $x\in S$ θα συγκλίνει σχεδόν ομοιόμορφα προς την συνάρτηση $f(x)=0$, $x\in S$.