ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΘΗΝΩΝ
ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

Εξετάσεις στο μάθημα **ΑΠΕΙΡΟΣΤΙΚΟΣ ΛΟΓΙΣΜΟΣ ΙΙΙ** (20.1.2000)

1ο. Έστω $f: G \subseteq IR^2 \to IR$, η οποία είναι διαφορίσιμη στο σημείο $\bar{p}$ του ανοικτού G. Αποδείξτε ότι: i) υπάρχει η κατευθυνόμενη παράγωγος $D_{\bar{a}}f(\bar{p})$ ως προς κάθε κατεύθυνση $\bar{a}$ και ισχύει $D_{\bar{a}}f(\bar{p}) = \nabla f(\bar{p}) \cdot \bar{a}$. ii) Αν $\nabla f(\bar{p}) \neq \bar{0}$, η κατευθυνόμενη παράγωγος $D_{\bar{a}}f(\bar{p})$ (ως συνάρτηση του $\bar{a}$) λαμβάνει μέγιστη τιμή (ίση με $\|\nabla f(\bar{p})\|$, όταν τα $\bar{a}$ και $\nabla f(\bar{p})$ είναι παράλληλα και ομόρροπα).

2ο. i) Να εξετασθεί αν η συνάρτηση $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{\eta\mu\, xy}{x}, & x \neq 0 \\ 0 & , x = 0 \end{cases}$ είναι διαφορίσιμη στο (0,0) και αν υπάρχει το $\nabla f(0,1)$.

ii) Να υπολογισθεί μία προσεγγιστική τιμή της παράστασης $\sqrt{(5{,}98)^2 + (8{,}01)^2}$.

3ο. Έστω μια διαφορίσιμη συνάρτηση $f: IR^n \to IR$ και σταθερό $a \in IR$. Αποδείξτε ότι: $\bar{x} \cdot \nabla f(\bar{x}) = af(\bar{x})\ \forall \bar{x} \in IR^n$ τότε και μόνον τότε, όταν ισχύει $f(t\bar{x}) = t^a f(\bar{x})\ \forall t > 0$ (η f είναι ομογενής βαθμού a).

4ο. Να ευρεθούν τα σημεία $(x,y) \in IR^2$ στα οποία η συνάρτηση $\bar{f}(x,y) = (e^x \sigma\upsilon\nu\, y, e^x \eta\mu\, y)$ είναι τοπικά αντιστρέψιμη και να υπολογισθούν η παράγωγος και το διαφορικό της (αντίστοιχης) τοπικής αντίστροφης.

5ο. i) Πως εντοπίζονται τα σημεία (πιθανών) τοπικών ακροτάτων μιας συνάρτησης $f: U \subseteq IR^3 \to IR$ (αποδείξτε ό,τι ισχυριστείτε).

ii) Βρείτε τα σημεία τοπικών ακροτάτων και το είδος τους της συνάρτησης $f(x,y) = x^3 + xy^2 - y^2 - x$.

6ο. Να υπολογισθεί, αν υπάρχει, το $\iiint_B x\,dx\,dy\,dz$, όπου B είναι το τετράεδρο με κορυφές (0,0,0), (2,0,0), (0,2,0) και (0,0,3), καθώς επίσης και ο όγκος $V(B)$ του B.

7ο. i) Να αποδειχθεί ότι το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα $\int_\Gamma f\,ds$ είναι ανεξάρτητο των αναπαραμετρήσεων της Γ.

ii) Να υπολογισθεί το $\iint_D (x+y)\,dx\,dy$, όπου $D = \{(x,y) \in IR^2 : |x| + y \leq 1,\ y \geq 0\}$.

8ο. i) Να ευρεθούν τα Δυναμικά του $\bar{F} = (P,Q,R): IR^3 \to IR^3$ με $\bar{F}(x,y,z) = (y, x + e^z, ye^z)$.

ii) Να εξετασθεί αν το $\bar{F}: IR^2 \setminus \{\bar{0}\} \to IR^2$ με $\bar{F}(x,y) = \left(-\dfrac{y}{x^2+y^2}, \dfrac{x}{x^2+y^2}\right)$ είναι συντηρητικό (πλήρης δικαιολόγηση).

9ο. i) Υπολογείστε τα επικαμπύλια ολοκληρώματα: $\int_{\Gamma_1} \bar{F} \cdot d\bar{r}$, $\int_{\Gamma_2} \bar{F} \cdot d\bar{r}$, όπου $\bar{F}(x,y) = (x^2, xy)$, Γ_1 το ευθύγραμμο τμήμα με αρχή το (0,0) και πέρας το (1,1) και Γ_2 η καμπύλη $y = x^2$ με αρχή το (0,0) και πέρας το (1,1).
Σχολιάστε τα αποτελέσματα και διατυπώστε το σχετικό θεώρημα.

ii) Έστω G ένα απλό σύνολο Green και f μια αρμονική συνάρτηση (ισχύει δηλαδή ότι $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0$), στο G. Αποδείξτε ότι ισχύει: $\int_{\partial G} \dfrac{\partial f}{\partial y} dx - \dfrac{\partial f}{\partial x} dy = 0$, όπου ∂G θετικά προσανατολισμένο.

10ο. Να επαληθευθεί ο τύπος του Green για το διανυσματικό πεδίο $\bar{F}(x,y) = (xy - x^2, x^2 y)$ και G το τρίγωνο με κορυφές (0,0), (0,1) και (1,1).

Από τα δέκα (10) θέματα να γραφούν το οκτώ (8)