Εξετάσεις στο μάθημα **«Απειροστικός Λογισμός ΙΙΙ»** (εξέταση 18.1.2001)

Θέμα 1° Δίδεται η συνάρτηση $f(x,y)=\begin{cases} \dfrac{x^2y}{x^4+y^2}\cdot\sqrt{x^2+y^2}, & (x,y)\neq(0,0) \\ 0, & (x,y)=(0,0) \end{cases}$. Εξετάστε την f ως προς τη συνέχεια και τη διαφορισιμότητα στο (0,0) και υπολογίστε την κατευθυνόμενη παράγωγο $D_{\vec{u}}f(0,0)$.

Θέμα 2° (α) Υπολογίστε προσεγγιστικά τον αριθμό $\sqrt{(5{,}98)^2+(8{,}01)^2}$.

(β) Μελετήστε ως προς την ομοιόμορφη συνέχεια τις συναρτήσεις $f(x,y)=\sqrt{\dfrac{x}{y}}$, $g(x,y)=\sqrt{xy}$, $x,y>0$.

Θέμα 3° (α) Δώστε τους ορισμούς: κυρτό, πολυγωνικά συνεκτικό και κατά τόξα συνεκτικό σύνολο και να διατυπωθούν οι μεταξύ τους σχέσεις.
(β) Διατυπώστε και αποδείξτε το Θεώρημα Μέσης Τιμής του Διαφορικού Λογισμού.

Θέμα 4° Βρείτε τα σημεία (x,y) στα οποία η συνάρτηση $\vec{f}(x,y)=(e^x\cos y,\ e^x\sin y)$ είναι τοπικά αντιστρέψιμη ~~και υπολογίστε το διαφορικό της τοπικής αντίστροφης. Είναι η $\vec{f}$ ολικά αντιστρέψιμη;~~

Θέμα 5° (α) Μελετήστε ως προς την ύπαρξη ακροτάτων τη συνάρτηση $f(x,y)=\sqrt{x^2+y^2}+y^2-1$ i) στο χωρίο $x^2+y^2\le 1$ και ii) στο $x^2+y^2=1$.
(β) Έστω $f(x,y)$ C^1 – τάξεως συνάρτηση. Θέτουμε $x=u+v$, $y=u\cdot v$. Αν $h(u,v)=f(x(u,v),y(u,v))$ αποδείξτε ότι $\dfrac{\partial f}{\partial x}=\dfrac{1}{u-v}\left(u\dfrac{\partial h}{\partial u}-v\dfrac{\partial h}{\partial v}\right)$ και $\dfrac{\partial f}{\partial y}=\dfrac{1}{u-v}\left(\dfrac{\partial h}{\partial v}-\dfrac{\partial h}{\partial u}\right)$.

Θέμα 6° Δίδεται το ελλειψοειδές $S:\left(\dfrac{x}{a}\right)^2+\left(\dfrac{y}{\beta}\right)^2+\left(\dfrac{z}{\gamma}\right)^2=1,\ (\alpha,\beta,\gamma>0)$. Βρείτε το εφαπτόμενο επίπεδο σ' ένα σημείο $(x_0,y_0,z_0)\in S$. Υπολογίστε τα σημεία (x_0,y_0,z_0) για το οποίο ο όγκος της πυραμίδας που σχηματίζεται με κορυφές το (0,0,0) και τα σημεία τομής του επιπέδου με τους άξονες γίνεται ελάχιστος.

Θέμα 7° (α) Υπολογίστε το ολοκλήρωμα $\displaystyle\int_0^1\left(\int_x^1 \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}dy\right)dx$.

(β) Υπολογίστε το $\displaystyle\int_\Gamma ye^{xy}dx+xe^{xy}dy$ όπου $\Gamma:\ y=\eta\mu^7 x,\quad x\in[0,\pi]$.

Θέμα 8° Υπολογίστε το ολοκλήρωμα $\displaystyle\iint_D (x^2+y^2)dxdy$, όταν το D περικλείεται από τις καμπύλες $xy=2,\ xy=4,\ x^2-y^2=1,\ x^2-y^2=9$ με $x,y>0$.

Θέμα 9° Επαληθεύστε το Θεώρημα Green για τη συνάρτηση $\vec{F}(x,y)=(4x-2y,2x+6y)$ στο χωρίο $D=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2: x^2+y^2\ge 1,\ \dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{4}\le 1\right\}$.

Θέμα 10° Έστω $\vec{F}(x,y)=\left(\dfrac{-y}{x^2+y^2},\dfrac{x}{x^2+y^2}\right),\ (x,y)\neq(0,0)$. Εξετάστε αν το $\vec{F}$ είναι αστρόβιλο και αν είναι συντηρητικό. Υπολογίστε το $\displaystyle\int_\Gamma \vec{F}\cdot d\vec{r}$ όπου Γ το σύνορο του $B=[-a,a]\times[-\beta,\beta],(\alpha,\beta)>0$.

(Από τα 10 θέματα θα γράψετε τα 8)