Απειροστικός Λογισμός ΙΙΙ 23/2/98.

1 i) Αν $A \subset \mathbb{R}^2$ ανοικτό, $(x_0,y_0) \in A$ και $f: A \to \mathbb{R}$ ώστε να υπάρχουν τα $\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = a$, $\lim_{x\to x_0} f(x,y) = \beta(y)$ και $\lim_{y\to y_0} f(x,y) = \gamma(x)$, να αποδειχθεί τότε ότι υπάρχουν και τα διαδοχικά όρια

$$\lim_{y\to y_0}\lim_{x\to x_0} f(x,y) = \lim_{y\to y_0}\beta(y) = a \quad \text{και} \quad \lim_{x\to x_0}\lim_{y\to y_0} f(x,y) = \lim_{x\to x_0}\gamma(x) = a$$

ii) Των $f: \mathbb{R}^2 \setminus \{(x,y):\ x+y=0\} \to \mathbb{R}$ με $f(x,y) = \dfrac{y-x}{y+x}$ και $g: \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \to \mathbb{R}$ με $g(x,y) = \dfrac{x^2y^2}{x^2y^2 + (x-y)^2}$ να εξετασθεί αν υπάρχουν τα $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ και $\lim_{(x,y)\to(0,0)} g(x,y)$.

iii) Να εξετασθεί αν ισχύει το αντίστροφο του i).

2 i) Των συναρτήσεων $f, g: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ με $f(x,y) = x^3y^2 + x^4\sin y + \cos(xy)$ και

$$g(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy(x^2-y^2)}{x^2+y^2}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

να ευρεθούν αν υπάρχουν οι $f_{xy}(x,y)$, $f_{yx}(x,y)$, $g_{xy}(0,0)$, $g_{yx}(0,0)$.

ii) Να σχολιασθεί το αποτέλεσμα του i) και να διατυπωθεί οικείο (επώνυμο) θεώρημα.

3 Έστω $f(x,y)$ διαφορίσιμη συνάρτηση. Θέτουμε $h(u,v) = f(u+v, uv)$ με $u \neq v$. Αποδείξτε ότι $\dfrac{\partial f}{\partial x} = \dfrac{1}{u-v}\left(u\dfrac{\partial h}{\partial u} - v\dfrac{\partial h}{\partial v}\right)$ και $\dfrac{\partial f}{\partial y} = \dfrac{1}{u-v}\left(\dfrac{\partial h}{\partial v} - \dfrac{\partial h}{\partial u}\right)$. 1,25

4 Έστω $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2+y}, & x^2 \neq -y \\ 0, & x^2 = -y \end{cases}$. Αποδείξτε ότι υπάρχει η κατευθυνόμενη παράγωγος $D_{\vec a} f(0,0)$ στην κατεύθυνση $\vec a$, $\|\vec a\| = 1$. Είναι η f διαφορίσιμη στο $(0,0)$; 1,25

5. i) Αν $A \subset \mathbb{R}^3$ ανοικτό και κυρτό και η $f: A \to \mathbb{R}$ είναι διαφορίσιμη να αποδειχθεί ότι για οποιαδήποτε $\vec x, \vec y \in A$, $\vec x \neq \vec y$ υπάρχει $\vec z \in [\vec x, \vec y]$ με $\vec z = (1-t_0)\vec x + t_0\vec y$, $0 < t_0 < 1$ ώστε να ισχύει $f(\vec y) - f(\vec x) = df(\vec z)(\vec y - \vec x)$.

ii) Να εξετασθεί αν ισχύει αντίστοιχο αποτέλεσμα για διανυσματικές συναρτήσεις, θεωρώντας την συνάρτηση $\vec f(t) = (t^2, t^3)$, $t \in \mathbb{R}$

www.mathsgr

5. i) Να ευρεθούν τα σημεία τοπικών ακροτάτων της $f(x,y)=x^2-y^2$ υπό την συνθήκη $x^2+y^2=1$.

ii) Να ευρεθεί η εξίσωση της εφαπτομένης της τομής των επιφανειών

$S_1: \ z=x^2+2y^2$ και

$S_2: \ z=2x^2-3y^2+1$ στο σημείο $\vec{P}=(2,1,6)$.

7. Υπολογίστε το ολοκλήρωμα $\iiint_B \sqrt{x^2+y^2}\,dx\,dy\,dz$ όπου

$B=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3: \ x^2+y^2\le 4$ και $x^2+y^2\le z\le 8-x^2-y^2\}$

8. Υπολογίστε το ολοκλήρωμα $\int_\Gamma \vec{F}\cdot d\vec{r}$ όπου $\vec{F}(x,y)=(x^2,xy)$ και Γ είναι

i) το ευθύγραμμο τμήμα με άκρα τα σημεία $(0,0)$, $(1,1)$

ii) το τμήμα της παραβολής $y=x^2$ με άκρα τα σημεία $(0,0)$, $(1,1)$.

Σχολιάστε το αποτέλεσμα και διατυπώστε το σχετικό θεώρημα.

[illegible] Επαληθεύστε το Θεώρημα Green για το διανυσματικό πεδίο $\vec{F}(x,y)=\left(\frac{-y}{x^2+y^2},\frac{x}{x^2+y^2}\right)$ και το χωρίο $D=\{(x,y): \ 1\le x^2+y^2\le 2\}$.

1,25

[illegible] i) Να αποδειχθεί ότι κάθε C^1-τάξεως συντηρητικό πεδίο $\vec{F}: A(\subset\mathbb{R}^3)\to\mathbb{R}^3$, A-ανοικτό, είναι αστρόβιλο. 0,625

ii) Να εξετασθεί το αντίστροφο του i). (πλήρης αιτιολόγηση).

Από τα 10 θέματα να γράψετε τα 8.

www.mathS.gr