Εξετάσεις Απειροστικού Λογισμού ΙΙΙ (15.2.1999)

1. Έστω $f: G \subseteq /R^n \to /R$, η οποία είναι διαφορίσιμη στο σημείο $\vec{p}$ του ανοικτού συνόλου G. Αποδείξτε ότι: **i)** υπάρχει η κατευθυνόμενη παράγωγος $D_{\vec{a}} f(\vec{p})$ ως προς κάθε κατεύθυνση $\vec{a}$ και ισχύει $D_{\vec{a}} f(\vec{p}) = \nabla f(\vec{p}) \cdot \vec{a}$. **ii)** Αν $\nabla f(\vec{p}) \neq \vec{0}$, η κατευθυνόμενη παράγωγος $D_{\vec{a}} f(\vec{p})$ (ως συνάρτηση του $\vec{a}$) λαμβάνει μεγίστη τιμή (ίση με $\|\nabla f(\vec{p})\|$, όταν τα $\vec{a}$ και $\nabla f(\vec{p})$ είναι παράλληλα και ομόρροπα).

2. **i)** Εξετάστε αν η συνάρτηση $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^3}{x^2+y^2}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & (x,y) = (0,0) \end{cases}$ έχει κατευθυνόμενες παραγώγους $D_{\vec{a}} f(0,0)$ ως προς κάθε κατεύθυνση $\vec{a}$ και αν είναι διαφορίσιμη στο $(0,0)$. **ii)** Εξετάστε αν είναι διαφορίσιμη η συνάρτηση

$$f(x,y) = \begin{cases} x\eta\mu\dfrac{1}{y}, & y \neq 0 \\ 0, & y = 0 \end{cases}.$$

3. **i)** Υπολογίστε μία προσεγγιστική τιμή της παραστάσεως $\sqrt{4{,}02} + \sqrt[3]{8{,}03}$. **ii)** Αν $w(x,y,z) = x^3 f\left(\dfrac{y}{x}, \dfrac{z}{x}\right)$, να αποδειχθεί τότε ότι $x\dfrac{\partial w}{\partial x} + y\dfrac{\partial w}{\partial y} + z\dfrac{\partial w}{\partial z} = 3w$.

4. **i)** Δίδεται η συνάρτηση $\vec{f}(x,y) = (xe^y, xe^{-y}), (x,y) \in /R^2$. Βρείτε τα σημεία (x,y), στα οποία η $\vec{f}$ είναι τοπικά αντιστρέψιμη. **ii)** Εξετάστε αν το σύστημα

$$\begin{aligned} xv + yu + z + u^2 &= 0 \\ xyz + u + v + 1 &= 0 \end{aligned}$$

περιέχει υπό πεπλεγμένη μορφή δύο C^1-τάξεως συναρτήσεις $u = f(x,y,z)$ και $v = g(x,y,z)$ στην περιοχή του σημείου $(x,y,z,u,v) = (2,1,0,-1,0)$ και υπολογίστε τις μερικές παραγώγους των f και g στο σημείο $(x,y,z) = (2,1,0)$.

5. Βρείτε τα σημεία της καμπύλης $5x^2 + 6xy + 5y^2 = 1$ στο επίπεδο που απέχουν ελάχιστη και μέγιστη απόσταση από την αρχή των αξόνων.

6. Να αποδειχθεί ότι το εφαπτόμενο επίπεδο στο σημείο $(x_0, y_0, z_0) \neq \vec{0}$ του κώνου $S = \{(x,y,z) \in /R^3 : z^2 = x^2 + y^2, z \geq 0\}$ περνά από το $(0,0,0)$ και η κάθετη (σ' αυτό) ευθεία στο σημείο $(x_0, y_0, z_0) \neq (0,0,0)$ τέμνει τον άξονα του z.

7. Να υπολογισθεί το $I = \int_0^1 \int_{\sqrt{x}}^1 \sqrt{1+y^3}\, dy dx$.

8. **i)** Να υπολογισθούν το $\iint_D \eta\mu(x^2+y^2)dxdy$ και το εμβαδόν $A(D)$, όπου D είναι ο κύκλος με
5 εξίσωση περιφέρειας: $x^2 + y^2 = a^2, a > 0$. **ii)** Να υπολογισθεί το εμβαδόν $A(D)$ του $D \subseteq /R^2$, που βρίσκεται εκτός της καμπύλης $x^2 + y^2 = 2\ (\sqrt{x^2+y^2} + y)$ και εντός της καμπύλης $x^2 + y^2 = 6y$.

9. **i)** Αν $\Gamma (= \vec{r}([a,b]) \subseteq /R^n$ είναι μια καμπύλη C^1-τάξεως, να αποδειχθεί τότε ότι το μήκος της $\ell(\Gamma)$ είναι ανεξάρτητο των αναπαραμετρήσεων. **ii)** Να υπολογισθεί το μήκος $\ell(\Gamma)$ της $\Gamma: \vec{r}: [0, 2\pi] \to /R^3$ με $\vec{r}(t) = (a\sigma\upsilon\nu t, a\eta\mu t, \beta t), a > 0, \beta > 0$. Να υπολογισθεί επίσης κατά μήκος της καμπύλης αυτής Γ το $\int_\Gamma f ds$, όπου $f: \Gamma \to /R$ με $f(x,y,z) = xy^2 + z$.

10. Να υπολογισθεί το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα $I = \int_\Gamma \vec{F} \cdot d\vec{r}$ όπου $\vec{F}(x,y) = (\dfrac{y^2}{2}, xy)$ και Γ είναι: **i)** Το ευθύγραμμο τμήμα Γ_1 με άκρα τα σημεία $(0,0)$, $(1,1)$, **ii)** Το τμήμα Γ_2 της παραβολής $y = x^2$ με άκρα $(0,0)$, $(1,1)$. **iii)** Το αποτέλεσμα i) και ii) ήταν αναμενόμενο και γιατί;

<u>Απαντήστε σε 8 από τα 10 θέματα</u>